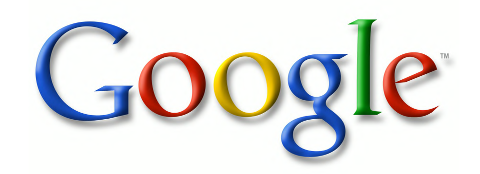




ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK U. GRAPHISCHEN STATIK
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

TEXT UND ATLAS.

MÜNCHEN 1871.

R. OLDENBOURG.

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK U. GRAPHISCHEN STATIK
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

TEXT.

MÜNCHEN 1871.

R. OLDENBOURG.

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK U. GRAPHISCHEN STATIK
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

MÜNCHEN 1871.

R. OLDENBOURG.

VORWORT.

In dem Buche, welches ich dem fachkundigen Publikum und den Studirenden der Ingenieurwissenschaften hiemit vorlege, habe ich mir als Aufgabe gestellt, die graphische Statik als solche, abgesehen von ihren Anwendungen, in ein systematisch geordnetes Lehrgebäude zu bringen, wie das für die Statik überhaupt und für die übrigen Zweige der Mechanik ja längst geschehen ist. Wenn ich sage: „abgesehen von ihren Anwendungen", so meine ich damit natürlich nicht, dass auf diese keine Rücksicht genommen worden wäre. Im Gegentheil wurde überall, wo Gelegenheit war, auf die Anwendung verwiesen, und zahlreiche Beispiele, der Praxis entnommen, wurden schon desshalb eingeflochten, um die vorgetragenen Sätze und Construktionsmethoden näher zu erläutern. Der ganze IX. Abschnitt ist eine Anwendung der Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte in der Ebene auf Fälle, wie sie beim Brückenbau vorkommen.

Ich habe bei meiner Arbeit fast ausschliesslich das Epoche machende Culmann'sche Werk: „Die graphische Statik", soweit es sich mit dieser Wissenschaft als solcher beschäftigt, also hauptsächlich den II. Abschnitt desselben, benützt. Dass und wo ich, auf den vorgefundenen Grundlagen weiter bauend, auch selbständig gearbeitet habe, sowohl bei der Anordnung des Stoffes, als auch bei der Durcharbeitung desselben, will ich hier nicht weiter hervorheben; der sachkundige Leser wird es leicht selbst finden. Die anderen Abschnitte des Culmann'schen Werkes, sowie die übrige, noch sehr wenig umfangreiche Literatur der graphischen Statik enthalten ausschiesslich Anwendungen derselben, für deren Verständniss mein Buch die nöthige Vorbereitung geben will. Dies ist sein eigentlicher Zweck. Ich bin der Ansicht, dass die geringe Verbreitung, welche die Anwendung der graphischen Statik bis jetzt unter den Ingenieuren gefunden hat, hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben sei, dass es an einem eigentlichen, systematisch durchgearbeiteten Lehrbuch für diese neue Wissenschaft fehlt. Es würde mir zur grossen Befriedigung gereichen, wenn, die Richtigkeit meiner Ansicht vorausgesetzt, mein Buch diesem Bedürfnisse abhelfen würde. Denn gewiss, die graphische Statik ist von solcher Wichtigkeit für das Studium der Ingenieurwissenschaften sowohl, wie für den ausübenden Ingenieur, dass ihr die weiteste Verbreitung zu wünschen ist und auch sicher noch zu Theil werden wird.

Vielleicht kann zu dieser weiteren Verbreitung auch die Eigenschaft meines Buches mit beitragen, dass zu seinem Verständniss die Kenntniss der sog. neueren Geometrie nicht erforderlich ist. Ich hatte es bei der Bearbeitung nicht darauf abgesehen, es hat sich von selbst so gemacht. Nun es so geworden ist, freue ich mich darüber, denn ich glaube, dass besonders den ausübenden Ingenieuren, die früher keine Gelegenheit hatten, sich mit den neuen Methoden der

Geometrie bekannt zu machen, ein wesentlicher Dienst geleistet ist, wenn sie unmittelbar an das Studium der graphischen Statik selbst gehen können, ohne sich erst mit einer Hülfswissenschaft für dieselbe beschäftigen zu müssen.

Die Tafeln sind mit möglichster Sorgfalt und Genauigkeit hergestellt. Doch muss man beim Abmessen von Dimensionen u. dgl. berücksichtigen, dass sich das Papier nach dem Drucke zusammenzog, und zwar nach verschiedenen Richtungen hin in ungleichem Grade. Die Ausstattung des ganzen Buches ist übrigens eine vorzügliche, und ich ergreife mit Freuden die Gelegenheit, der Verlagshandlung meinen Dank dafür auszusprechen.

München, im Februar 1871.

J. Bauschinger.

Inhalts-Verzeichniss.

I. Abschnitt.

Einleitung.

II. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen geraden Linie wirken.

III. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, die nach beliebigen Richtungen hin an einem und demselben Angriffspunkt wirken.

IV. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken.

V. Abschnitt.

Von den Drehungsmomenten der Kräfte.

VI. Abschnitt.

Kräfte im Raume.

VII. Abschnitt

Parallele Kräfte; ihr Mittelpunkt; ihre Momente in Bezug auf eine Ebene.

VIII. Abschnitt.

Vom Schwerpunkt.

IX. Abschnitt.

Parallele Kräfte in einer Ebene.

X. Abschnitt.

Höhere Momente und Trägheitsmoment paralleler Kräfte. Trägheitsfläche und Centralfläche.

XI. Abschnitt.

System paralleler Kräfte, deren Intensitäten den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene proportional sind. Centralellipsoid, Centralellipse u. Kern von Körpern u. ebenen Figuren (Querschnitten).

I. Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Zeitgrössen können in Zahlen ausgedrückt oder durch Linien dargestellt werden. — Die Mechanik beschäftigt sich nicht blos mit Zahlen- und Raumgrössen, wie die Mathematik, sondern auch mit Zeit- und Kraftgrössen. Die beiden letzteren aber werden entweder durch die eine, oder durch die andere der beiden erstgenannten Grössen ausgedrückt.

Zeitgrössen werden in Zahlen angegeben, indem man eine bestimmte Zeit, die Secunde oder Minute, die Stunde oder den Tag als Einheit annimmt und zusieht, wie oftmal diese in der gegebenen Zeit enthalten ist. — Um eine Zeitgrösse geometrisch, als Raumgrösse, darzustellen, wählt man ein meist gerades Stück Linie, durch welches man die Zeiteinheit repräsentirt, und dann stellt diejenige gerade Linie, deren Länge sich zu jenem Stücke verhält wie die gegebene Zeitgrösse zur Zeiteinheit, die erstere dar.

Die erste Methode wird überall da gebraucht, wo die Bewegung der Körper rechnerisch (analytisch) behandelt wird. Die letztere dient zur graphischen Darstellung der Bewegungen, indem gewöhnlich die Zeit als Abscisse und der Weg oder die Geschwindigkeit etc. als zugehörige Ordinate aufgetragen wird. Solche Darstellungen oder Aufzeichnungen werden auch von gewissen Apparaten, die zur Untersuchung einer vorliegenden Bewegung dienen sollen, erhalten, und man nennt diese Apparate dann selbstregistrirend. Als Beispiele hiefür mögen die Morin'sche Fallmaschine und die Schreibvorrichtung an dem, gleichfalls von Morin angegebenen und gebrauchten Apparat zur Bestimmung der Reibung der Körper angeführt werden.

§. 2. Kräfte können durch Zahlen bestimmt oder durch Linien dargestellt werden. — Eine Kraft ist nicht blos ihrer Grösse nach zu bestimmen, sondern es muss auch ihre Richtung und ihr Angriffspunkt angegeben werden, oder, da letzterer in ihrer Richtung beliebig verlegt werden darf, ihre Richtung und Lage, d. h. irgend ein Punkt in dieser Richtung. Um also eine Kraftgrösse durch Zahlen vollständig zu bestimmen, hat man erstens ihre Grösse auszudrücken, indem man eine Kraft von bestimmter Intensität als Einheit annimmt und angibt wie oftmal dieselbe in der gegebenen Kraft enthalten ist; zweitens ist die Richtung durch die trigonometrischen Funktionen der Winkel zu geben, welche dieselbe mit drei festen Richtungen im Raume (Coordinatenaxen) bildet; und drittens endlich muss ein Punkt, durch den diese Richtung geht, gewöhnlich der Angriffspunkt der Kraft, durch seine Coordinaten in

Bezug auf jenes Axensystem bestimmt werden. Dieser Methode bedient man sich da, wo die Aufgaben der Mechanik rein rechnerisch (analytisch) behandelt werden.

Viel einfacher ist die Darstellung einer Kraft auf geometrischem Wege, als Raumgrösse. Wählt man ein Stück gerader Linie als Krafteinheit, so kann jede gegebene Kraft ihrer Grösse, Richtung und Lage nach durch die Länge, Richtung und Lage einer geraden Linie repräsentirt werden. Diese Art der Darstellung liegt so nahe, dass sie eigentlich von jeher in der Mechanik gebräuchlich ist und auch da mitangewendet wird, wo die Behandlung im Wesentlichen eine analytische ist.

§. 3. Methode der graphischen Statik. Bezeichnungsweisen. — Derjenige Theil der Mechanik, den man die Statik nennt, hat es blos mit Kraft- nicht mit Zeitgrössen zu thun; er lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, die auf einen Körper wirken, und entwickelt hieraus die Bedingungen für das Gleichgewicht derselben. Die graphische Statik sucht diese Aufgabe auf rein geometrischem Wege durch Constructionen zu lösen, indem sie sich der zuletzt angegebenen Darstellungsweise der Kräfte als Raumgrössen ausschliesslich bedient.

Wir bezeichnen eine Kraft, wenn wir von ihr sprechen, in der Regel mit dem Buchstaben P, ihren Angriffspunkt durch A. Sind mehrere Kräfte vorhanden, so versehen wir, um sie voneinander zu unterscheiden, jene Buchstaben P und A mit den Zeigern 1, 2, 3 ... n. An das Ende der geraden Linie, welche eine Kraft repräsentirt, setzen wir den Buchstaben P, bezw. P_1, P_2 ...., an den Anfangspunkt, gleichviel, ob er wirklich der Angriffspunkt der Kraft ist, oder nicht, A, bezw. A_1, A_2 .... Dadurch ist zugleich der Sinn, in welchem die Kraft in der durch jene Linie dargestellten Richtung wirkt, unzweideutig angegeben. Doch werden wir, wo es leicht geschehen kann, diesen Sinn auch noch durch Pfeilspitzen hervorheben, die wir an das Ende oder irgendwo hin zwischen Anfang und Ende der betreffenden Linie setzen.

Wenn jedoch mehrere Kräfte, bezw. die sie repräsentirenden Linien, an einander gereiht werden, jede mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden, wie z. B. in den Figuren 1 bis 6 und 8, Taf. I, so begnügen wir uns, an den Anfangspunkt der ersten 0 zu setzen, und an den Endpunkt einer jeden blos den Index derselben 1, 2 .... n. Eine Zweideutigkeit kann dadurch, auch wenn gar keine Pfeilspitzen gebraucht werden, nicht entstehen; denn irgend eine Kraft (P_4 z. B.) bezw. die sie repräsentirende Linie reicht dann eben von dem Punkte, der mit einer um 1 niedrigeren Ziffer als ihr Index bezeichnet ist (3), bis zu dem Punkte, an welchem ihr Index steht (4). In ähnlicher Weise werden wir manchmal eine Kraft der Kürze halber auch blos mit dem Index 1, 2, 3 ... bezeichnen, den wir sonst an den Buchstaben P setzen.

Wenn wir endlich eine durch eine Linie repräsentirte Kraft durch die beiden Buchstaben oder Ziffern benennen, welche an deren Endpunkten stehen, so schreiben wir diese immer in solcher Ordnung, dass dieselbe zugleich den Sinn zu erkennen gibt, in welchem die Kraft in der Linie wirkt, nämlich zuerst den Angriffspunkt und dann den Endpunkt.

Eine Kraft, welche aus der Zusammensetzung mehrerer Kräfte P_n, P_r, P_s .... hervorgegangen ist, bezeichnen wir mit P_{nrs}... Wenn die Zeiger jener Kräfte in der Ordnung der natürlichen Zahlen aufeinanderfolgen, wie z. B. bei denen P_5, P_6, P_7, P_8, so schreiben wir für ihre Resultante auch kürzer P_{5-8}.

II. ABSCHNITT.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen geraden Linie wirken.

§. 4. **Zwei Kräfte von gleichem Sinne.** — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 in der nämlichen geraden Linie nach demselben Sinne hin wirken, so ist, gleichviel wo ihre Angriffspunkte liegen, ihre Resultante gleich ihrer Summe; sie liegt in derselben Geraden und ihr Angriffspunkt kann irgendwo in dieser genommen werden.

Man erhält diese Resultante graphisch, wenn man in der Geraden, in welcher beide Kräfte wirken, von einem beliebigen Punkt 0 (Fig. 1, Taf. I) aus die erste Kraft P_1 ihrer Grösse und ihrem Sinne nach als 0 1 abträgt und an ihren Endpunkt ebenso die zweite Kraft P_2 als 1 2 anfügt. Die Summe beider, oder die Strecke 0 2 vom Anfang 0 der ersten bis zum Endpunkt 2 der zweiten Kraft, ist die Resultante und repräsentirt dieselbe zugleich der Richtung und dem Sinne nach. Der Angriffspunkt kann in 0 oder in irgend einem anderen Punkte der Geraden genommen werden.

§. 5. **Beliebig viele Kräfte von gleichem Sinne.** — Ganz ebenso können mehrere Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_5$, die alle in derselben geraden Linie in dem nämlichen Sinne wirken, in eine Resultante vereinigt werden. Man trägt sie von einem beliebigen Punkt 0 (Fig. 2, Taf. I) der Geraden aus hintereinander in dieser auf, jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden. Die Verbindungslinie 0 5 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten Kraft stellt die Resultante der Grösse, Richtung und dem Sinne ihrer Wirkung nach vor. Dabei ist offenbar die Ordnung, in welcher die Kräfte aneinander gereiht werden, ganz gleichgültig.

§. 6. **Zwei gleichgrosse Kräfte von entgegengesetztem Sinne in der nämlichen geraden Linie. Gleichgewicht.** — Zwei Kräfte P_1, P_2, welche in der nämlichen geraden Linie, aber in entgegengesetztem Sinne wirken und von gleicher Grösse sind, halten sich, gleichviel wo ihre Angriffspunkte in jener Geraden liegen mögen, das Gleichgewicht. Es ist dies der einfachste Fall des Gleichgewichts, zugleich derjenige, von dessen Stattfinden wir unmittelbar überzeugt sind. Alle anderen müssen auf ihn zurückgeführt werden. — Trägt man die beiden in Rede stehenden Kräfte von einem beliebigen Punkt 0 (Fig. 3, Taf. I) der Geraden, in welcher sie wirken, hintereinander in dieser ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf, die zweite mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten fügend, so fällt der Endpunkt 2 jener in den Anfangspunkt 0 von dieser, die graphische Summe beider Kräfte, d. h. die Verbindung des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der zweiten Kraft, ist Null. Dies ist also im graphischen Sinne das Kennzeichen für diesen einfachsten Fall des Gleichgewichts.

§. 7. Zwei ungleiche Kräfte von entgegengesetztem Sinn. — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 von ungleicher Grösse im entgegengesetzten Sinne in derselben Geraden wirken, so ist ihre Resultante gleich ihrer Differenz. Man erhält sie, wenn man wieder von irgend einem Punkte 0 (Fig. 4 und 5, Taf. I) der Geraden aus, in welcher beide Kräfte wirken, die eine, P_1, ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf dieser Geraden als 0 1 abträgt und an ihren Endpunkt die zweite Kraft, P_2, ebenfalls ihrer Grösse und ihrem Sinne nach anfügt. Die Verbindung 0 2 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkt der zweiten Kraft stellt die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach dar und zwar in jedem Fall, ob die in dem einem, oder die im entgegengesetzten Sinne wirkende von den beiden Kräften die grössere ist.

§. 8. Beliebige Kräfte in der nämlichen geraden Linie. — In ganz gleicher Weise kann nun die Resultante beliebig vieler, in der nämlichen Geraden, aber in verschiedenem Sinne wirkender Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_5$ erhalten werden, wenn man sie von einem willkürlich angenommenen Punkte 0 (Fig. 6, Taf. I) dieser Geraden aus hintereinander ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf derselben abträgt, so dass jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden gefügt ist. Die Verbindungslinie 0 5 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten Kraft stellt die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach in jedem Falle vor. — Dabei ist die Ordnung, in welcher die Kräfte aneinander gefügt werden, offenbar völlig willkürlich.

Wenn der Endpunkt der letzten Kraft in den Anfangspunkt 0 der ersten fällt, so ist die Summe aller der Kräfte, die in einem Sinne wirken, gleich der Summe aller der im entgegengesetzten Sinne thätigen; sämmtliche Kräfte halten sich folglich das Gleichgewicht, wie in dem einfachen Fall des §. 6. — Es ist also auch hier wieder das Zusammenfallen des Endes des Kräftezuges mit seinem Anfange das graphische Kennzeichen für das Gleichgewicht der behandelten Kräfte.

III. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, die nach beliebigen Richtungen hin an einem und demselben Angriffspunkt wirken.

§. 9. Resultante beliebiger Kräfte an einem und demselben Angriffspunkt. — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 nach verschiedenen Richtungen hin an dem nämlichen Angriffspunkt 0 (Fig. 7, Taf. I) wirken, so findet man bekanntlich ihre Resultante der Grösse und Richtung nach als Diagonale 0 2 des über ihnen beschriebenen Parallelogrammes $0 P_1 2 P_2$. Diese Diagonale erhält man aber auch als Verbindungslinie des Anfangspunktes 0 der ersten Kraft mit dem Endpunkte 2 der zweiten Kraft, nachdem man von dem gemeinschaftlichen Angriffspunkt 0 aus beide Kräfte ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach so aneinander gereiht hat, dass der Anfangspunkt der zweiten mit dem Endpunkt der ersten zusammenfällt und dadurch der Kräftezug 0 1 2 gebildet wird.

Hat man nun mit den beiden Kräften noch eine dritte zu vereinigen, so kann man diese mit der eben erhaltenen Resultante in der nämlichen Weise zusammensetzen, also mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt jener Resultante oder an den Endpunkt der zweiten Kraft fügen d. h. von hier aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach abtragen; es ist dann wieder die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der dritten Kraft die Resultante der drei Kräfte der Grösse, Richtung und dem Sinne nach.

Der Schluss hieraus auf beliebig viele Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_7$, die alle in dem nämlichen Angriffspunkt 0 (Fig. 8, Taf. I) wirken, ist sehr leicht. Man findet deren Resultante, indem man sie von dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte 0 aus ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach so aneinander reiht, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Endpunkt der vorhergehenden zusammenfällt. Die Verbindungslinie 0 7 des Anfangspunktes des so erhaltenen Kräftezuges 0 1 2 3...7 mit seinem Endpunkte, in dem hiedurch bezeichneten Sinne genommen, stellt die gesuchte Resultante der Grösse, Richtung und dem Sinne nach vor.

Nach einem bekannten geometrischen Satz folgt hieraus unmittelbar, dass die Projektion der Resultante auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projektionen der Componenten auf dieselbe Linie ist.

§. 10. Kräftepolygon in der Ebene und im Raume. — Man nennt den Kräftezug 0 1 2 3...7 (Fig. 8, Taf. I) das Polygon der Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_7$. Diese Benennung kann man auch für die Fälle des vorigen Abschnittes noch beibehalten, nur fallen eben dort alle Polygonecken in eine gerade Linie. — Wenn sämmtliche Kräfte, wie in Fig. 8, Taf. I vorausgesetzt, in einer Ebene liegen, so wird das Polygon aus ihnen ein ebenes, das unmittelbar gezeichnet werden kann. Wirken aber die Kräfte, die in dem nämlichen Punkte angreifen, nach verschiedenen Richtungen des Raumes hin, so liegt das aus ihnen zu construirende Polygon nicht

mehr in einer Ebene und muss daher durch seine Risse (Projektionen) auf zwei Tafeln bestimmt werden, wie ja dann auch schon die Kräfte durch ihre Risse auf zwei Tafeln gegeben sein müssen. Nach dem bekannten Satze, dass parallele und gleichlange Gerade parallele und gleichgrosse Risse haben, können die Risse des Kräftepolygons sehr leicht aus denen der Kräfte erhalten werden. Jeder derselben ist das auf bereits angegebene Weise zu zeichnende Polygon aus den Rissen der Kräfte auf der betreffenden Tafel, den Riss des gemeinschaftlichen Angriffspunktes als Anfangspunkt des Polygons genommen. Die Verbindungslinie dieses Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons in der betreffenden Tafel ist der Riss der Resultante der gegebenen Kräfte, welche durch die so erhaltenen beiden Risse ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach vollständig bestimmt ist.

In Fig. 9, Taf. I ist diese Construktion für vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, welche nicht in einer Ebene liegen, durchgeführt. Die Risse ihres gemeinschaftlichen Angriffspunkts sind $0'$ und $0''$; die Risse der Kräfte selbst $0'P_1'$, $0''P_1''$; $0'P_2'$, $0''P_2''$.......; der eine Riss des Kräfte-Polygons im Raum ist $0'1'2'3'4'$, der andere $0''1''2''3''4''$. Die Linie des Raums, deren Risse $0'4'$ und $0''4''$ sind, stellt der Grösse und Richtung nach, in dem Sinne von 0 bis 4 aufgefasst, die Resultante P_{1-4} vollständig dar.

§. 11. Die Ordnung, in welcher man bei der oben gelehrten Construktion des ebenen oder unebenen Kräftepolygons die gegebenen Kräfte miteinander verbindet, ist ganz gleichgiltig. Dies ist leicht zu erweisen. Wenn man zunächst blos zwei aufeinanderfolgende Kräfte in's Auge fasst, so sieht man aus Fig. 7, Taf. I deutlich, dass man an dieselbe Endstelle 2 kommt, ob man die Kraft P_2 an P_1 reiht (Zug 0 1 2) oder umgekehrt die Kraft P_1 an die P_2 (Zug $0 P_2 2$). Durch wiederholtes Verwechseln blos zweier aufeinanderfolgender Kräfte aber kann man, wie bekannt, aus einer bestimmten Anordnung jede andere erhalten.

§. 12. Das aus beliebig gegebenen Kräften construirte Kräftepolygon gibt nicht blos die Resultante sämmtlicher Kräfte. Es kann mittelst desselben sofort die Resultante einer Anzahl aus diesen ausgewählter Kräfte erhalten werden, wenn letztere nur unmittelbar aufeinander folgen. Die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten dieser Kräfte mit dem Endpunkte der letzten, also die Diagonale, welche die ausgewählten Kräfte unterspannt, ist, in jenem Sinne genommen, die gesuchte Resultante. So sind in dem Polygon 0 1 2....7 der Fig. 8, Taf. I die Diagonalen 0 2, 0 3, 0 4, 2 4, 2 5 u. s. w. beziehungsweise die Resultanten der Kräfte 1 und 2; 1, 2 und 3; 1, 2, 3 und 4; 3 und 4; 3, 4 und 5.

§. 13. **Geschlossenes Kräftepolygon; Gleichgewicht von Kräften an einem und demselben Angriffspunkt.** — Wenn das Polygon, das aus beliebig gegebenen, aber sämmtlich in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräften P_1, P_2.... P_6 (Fig. 10, Taf. I) construirt wird, sich schliesst, d. h. wenn der Endpunkt 6 des Kräftezuges mit dem Anfangspunkt 0 desselben zusammenfällt, so ist offenbar die Resultante 0 5 aus allen Kräften, mit Ausschluss der letzten, gleich und gerade entgegengesetzt dieser letzten, P_6; die gegebenen Kräfte sind also im Gleichgewicht. Das Kennzeichen für das Geichgewicht von Kräften, die nach beliebigen Richtungen hin an einem und dem nämlichen Angriffspunkt wirken, ist also auch das (vergl. den vorigen Abschnitt), dass der aus ihnen construirte Kräftezug, in welchem jede folgende Kraft mit ihrem Anfangspunkt an das Ende der vorhergehenden gereiht wird, also das Kräftepolygon sich schliesst. Die Resultante sämmtlicher derartiger Kräfte, die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons, ist Null. Die Resultante 1 4 aber von einer

Anzahl P_2, P_3, P_4 derselben, die unmittelbar auf einander folgen, ist gleich und gerade entgegengesetzt der Resultante 4 1 aus den übrigen P_5, P_6, P_1. Wird folglich aus Kräften P_1, $P_2, \ldots P_6$, welche sich an einem und demselben Punkt 0 das Gleichgewicht halten, eine Gruppe aufeinanderfolgender P_2, P_3, P_4 ausgewählt und in entgegengesetzter Richtung genommen, so haben sie die nämliche Resultante 4 1, wie die übrig gebliebenen Kräfte. — Da übrigens die Ordnung, in welcher die Kräfte im Kräftepolygon an einander gereiht werden, willkürlich ist, so gelten die obigen Auseinandersetzungen, in welcher Weise auch die gegebenen im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in zwei Gruppen geschieden werden mögen.

§. 14. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die an demselben Angriffspunkt mit ihr wirken. — Wenn nun umgekehrt eine Kraft P (Fig. 11, Taf. I) in zwei oder mehrere Componenten zerlegt werden soll, die denselben Angriffspunkt wie sie haben, so müssen diese, so aneinander gereiht, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Ende der vorhergehenden zusammenfällt, einen Kräftezug 0 1 2 oder 0 1′ 2′ 3′ 4′ bilden, dessen Anfangspunkt auf den Anfangspunkt 0 der Kraft P und dessen Ende auf den Endpunkt P derselben Kraft zu liegen kommt. Im Uebrigen ist dieser Kräftezug, auch wenn er nur aus zwei Kräften 1 und 2 besteht, willkürlich. Speziell in diesem letzteren Fall können folglich entweder die Richtungen beider Componenten, oder die Grössen derselben, oder Grösse und Richtung der einen von ihnen beliebig angenommen werden. Die Anzahl der willkürlich anzunehmenden Stücke wird natürlich bei mehr als zwei Componenten, in die zerlegt werden soll, noch grösser.

IV. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken.

§. 15. **Resultante zweier Kräfte in einer Ebene. Fall des Gegenpaars (Drehzwillings).** — Nehmen wir wieder zunächst zwei Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 12b) Taf. I), welche in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten A_1 und A_2 wirken. Wenn beide Kräfte, gehörig verlängert, sich schneiden, so darf man sie nur mit ihren Angriffspunkten in den Schnittpunkt a verlegen und das Parallelogramm über ihnen construiren, um in der Diagonale desselben die Resultante ihrer Grösse, Richtung und Lage nach zu erhalten. Oder man kann auch von einem beliebigen Anfangspunkt 0 aus (Fig. 12a)) die beiden gegebenen Kräfte als 0 1 und 1 2 ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hintereinander auftragen, so gibt die Linie 0 2 die Resultante derselben, ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach. Ihre Lage in der Ebene ist somit bekannt, wenn man einen Punkt weiss, durch den sie hindurchgehen muss. Ein solcher ist der Schnittpunkt a der beiden Kräfte, vorausgesetzt natürlich, dass ein solcher vorhanden ist.

§. 16. Für parallele Kräfte sind die beiden eben besprochenen Verfahren zur Aufsuchung der Resultante nicht mehr anwendbar. Es ist aber offenbar wünschenswerth, ein Verfahren zu kennen, das in gleicher Weise bei parallelen und bei sich schneidenden Kräften gebraucht werden kann. Zu diesem Behufe darf nur ein anderer als der Schnittpunkt der beiden Kräfte aufgesucht werden, durch den die Resultante hindurchgehen muss, und einen solchen findet man auf folgendem Wege:

Man denke sich P_1 in zwei Componenten zerlegt, welche sich, nach beliebigen Richtungen 0 I und I II hin wirkend, im Punkte I auf der Richtung der Kraft P_1 schneiden, und ebenso P_2 in zwei Componenten, von denen die eine, in der Linie I II wirkend, der in derselben Linie thätigen Componente von P_1 gleich und entgegengesetzt ist; dadurch ist die zweite Componente von P_2 ihrer Grösse und Richtung, aber auch ihrer Lage II III nach bestimmt, da sie durch den Punkt II auf der Kraft P_2 hindurch gehen muss. Von den vier Componenten, in welche dadurch die beiden Kräfte P_1 und P_2 zerlegt worden sind, halten sich die beiden, in der Linie I II thätigen das Gleichgewicht. Die Resultante aus den beiden andern ist daher genau gleich der Resultante der Kräfte P_1 und P_2, und es ist folglich auch der Schnittpunkt α der Linien 0 I und II III ein Punkt, durch den diese Resultante gehen muss.

Jene Zerlegung der Kräfte P_1 und P_2 ist aber mit Hülfe der Figur 12a) leicht vorzunehmen. Nimmt man einen beliebigen Punkt C an und zieht von ihm aus die Strahlen C0 und C1 nach dem Anfangs- und Endpunkte der Kraft 0 1, so stellen 0C und C1, in diesem Sinne genommen, zwei Componenten vor, in welche jene Kraft zerlegt ist; und zieht man noch

den Strahl C2, so sind 1C und C2 die beiden Componenten der zweiten Kraft, von denen die erstere gleich und entgegengesetzt der Componente C1 der Kraft 01 ist. Wenn man folglich (Fig. 12b)) durch einen beliebigen Punkt I der Kraft P_1 die Linie 0 I parallel zum Strahl 0C, dann die Linie I II parallel zum Strahl 1C zieht, bis sie die Kraft P_2 in II schneidet und endlich die Linie II III parallel zum Strahl 2C, so gibt der Durchschnitt der Linien 0 I und II III einen Punkt α, durch den die Resultante der Kräfte P_1 und P_2 hindurch gehen muss. Da diese der Grösse, Richtung und dem Sinne nach bereits durch die Linie 0 2 gegeben ist, so ist sie vollständig bekannt.

Anmerkung. Dass α ein Punkt in der Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2 ist, kann auch auf rein geometrischem Wege aus den Figuren 12a) und 12b) erwiesen werden. Denn in den beiden vollständigen Vierecken 012C und IαII a sind die fünf Paar entsprechenden Seiten 01 und aI, 1 2 und aII, 2C und IIα, C0 und αI, C1 und I II bezw. parallel; folglich müssen es auch die sechsten 02 und aα sein; α ist also ein Punkt der durch a gehenden zu 02 parallelen Resultante.

§. 17. Das hier gefundene Verfahren ist aber nun, wie leicht zu sehen, ebenso gut auf parallele, als auf Kräfte, welche sich wie die P_1 und P_2 der Fig. 12b) schneiden, anzuwenden. In den Figuren 13a) und 13b), sowie 14a) und 14b) auf Taf. I wurde in der That mit seiner Hülfe die Resultante je eines Paars paralleler Kräfte P_1 und P_2 aufgefunden und zwar für die beiden Fälle, wo diese Kräfte in gleichem oder im entgegengesetzten Sinne wirken. Der Kräftezug 0 1 2, welchen man erhält, wenn man in den Figuren 13a) und 14a) die beiden Kräfte von einem beliebigen Punkt 0 aus aufträgt, fällt hier in eine gerade Linie. Nimmt man ausserhalb derselben einen beliebigen Punkt C, zieht von diesem aus die Strahlen C0, C1, C2 und alsdann in den Figuren 13b) und 14b) durch einen beliebigen Punkt der Kraft P_1 die Linien 0 I parallel zu 0C und I II parallel zu 1C, letztere bis sie die Kraft P_2 in II trifft und endlich durch diesen Schnittpunkt II III parallel zu 2C, so gibt der Durchschnitt der Linien 0 I und II III einen Punkt α, durch den die gesuchte Resultante hindurch gehen muss. Grösse, Richtung und Sinn derselben sind durch die Strecke 0 2 der Figuren 13a) und 14a) ebenso bestimmt wie bei Kräften, die in der nämlichen geraden Linie wirken.

§. 18 Es ist klar, dass auf dem eben gezeigten Wege allemal ein Schnittpunkt α (Fig. 12b), 13b) und 14b), Taf. I), durch den die Resultante hindurch gehen muss, gefunden wird, wenn nur die Strahlen C0 und C2 in den Figuren 12a), 13a) und 14a) nicht in dieselbe gerade Linie zusammenfallen. Das kann durch zweckmässige Wahl des sonst ganz beliebigen Punktes C leicht vermieden werden, vorausgesetzt dass die Punkte 2 und 0 nicht selbst aufeinander zu liegen kommen. Das Letztere aber tritt wirklich ein bei einem Paar paralleler, gleicher, im entgegengesetzten Sinne gerichteter Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 15, Taf. I), welche man in der Mechanik ein Gegenpaar oder einen Drehzwilling nennt. Durch letztere Bezeichnung soll das Bestreben eines Paars solcher Kräfte ausgedrückt werden, die Ebene, in der sie liegen, um irgend einen ihrer Punkte zu drehen. Wo man auch in diesem Falle den Punkt C annehmen mag, nachdem in Fig. 15a) die beiden Kräfte von einem beliebigen Punkt 0 aus in dem Zuge 0 1 2 aneinander gereiht worden sind, die Linien 0 I und II III in Figur 15b), bezw. parallel zu 0C und 2C, werden immer parallel zu einander werden; und da die Resultante stets durch ihren Durchschnittspunkt hindurch gehen muss, so liegt sie selbst in der unendlich fernen Geraden der Ebene, in der die Kräfte wirken. Ihre Grösse 0 2 ist nach Fig. 15a) Null oder unendlich klein. Zwei Kräfte also, die ein Gegenpaar bilden, lassen sich nicht mehr in

eine einzige, endliche, in endlicher Entfernung gelegene Kraft vereinigen. Ihre Resultante ist einer unendlich kleinen Kraft in unendlicher Entfernung, in der unendlich fernen Geraden der Ebene des Gegenpaars gleich zu achten.

§. 19. Der Punkt a in den Figuren 12 bis 14, Taf. I, der wegen der willkürlichen Lage des Punktes C irgendwo in der Resultante der Kräfte P_1 und P_2 liegen kann, hat eine merkwürdige Eigenschaft: Zieht man durch ihn eine Parallele m n zur Linie I II, bis dieselbe beide Kraftrichtungen P_1 und P_2 bezw. in m und n schneidet, so sind die dadurch entstandenen Dreiecke I m a und II a n bezw. den Dreiecken 0 1 C und 2 C 1 der Figuren a) ähnlich. Daraus folgen die Proportionen

$$0\,1 : 1\,C = \mathrm{I}m : m a,$$
$$1\,C : 1\,2 = a n : \mathrm{II} n,$$

welche sich zu der einen

$$0\,1 : 1\,2 = \mathrm{I}m \times a n : m a \times \mathrm{II} n$$

zusammenfassen lassen. Nun haben die Dreiecke I m a und II a n über den Grundlinien m a und a n gleiche Höhen; ihre Grundlinien verhalten sich also wie ihre Flächeninhalte, die auch den Produkten aus den Seiten I m und II n in die, auf sie vom Punkte a aus gefällten Senkrechten $a p_1$ und $a p_2$ proportional gesetzt werden können. Obige Proportion kann daher in folgende

$$0\,1 : 1\,2 = \mathrm{I}m \times \mathrm{II}n \times a p_2 : \mathrm{I}m \times \mathrm{II}n \times a p_1$$

oder in die einfachere

$$0\,1 : 1\,2 = a p_2 : a p_1$$

umgewandelt werden, und diese sagt:

Die von irgend einem Punkte a der Resultante auf die Componenten gefällten Senkrechten verhalten sich umgekehrt wie diese Componenten.

Bei parallelen Kräften (Fig. 13 und 14) liegen jene beiden Senkrechten in einer durch den Punkt a gezogenen geraden Linie, und es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle jener Satz nicht blos von den Abschnitten dieser, durch a senkrecht auf die beiden Kräfte gezogenen Linie gilt, sondern von denen jeder beliebigen, durch den Punkt a bis an die beiden Kräfte gelegten Geraden.

§. 20. **Kräfte- und Seilpolygon zweier Kräfte in einer Ebene.** — Denken wir uns in den Figuren 12 bis 14 auf Tafel I die Kräfte P_1, P_2 wieder durch ihre Componenten 0 C und C 1, sowie 1 C und C 2 ersetzt, die in den Linien 0 I, I II und II III wirken, so heben sich die beiden in I II thätigen, nämlich C 1 und 1 C, gegenseitig auf, indem sie jene Linie, als Theil der materiellen Ebene, in der die Kräfte wirken, betrachtet, auf Zug (wie in Fig. 12 und 13) oder auf Druck (wie in Fig. 14) angreifen. Um auch den beiden andern, in 0 I und II III thätigen Componenten 0 C und C 2 und folglich den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht zu halten, darf man nur jeder derselben in der Linie, in welcher sie wirkt, eine gleichgrosse Kraft C 0 und 2 C entgegensetzen, wodurch diese Linien ebenfalls auf Druck oder Zug in Anspruch genommen werden. Nun ist klar, dass das auf solche Weise erzielte Gleichgewicht schon bestehen kann, wenn die materielle Ebene, in der die Kräfte liegen, durch ein System 0 I II III materieller Linien ersetzt wird, welches, in den Eckpunkten I und II wie in Scharnieren beweglich, im Stande ist, in seinen einzelnen Theilen den Zug oder Druck auszuhalten, der in der Längsrichtung derselben, wie oben entwickelt, ausgeübt wird.

Ob Zug oder Druck in einem solchen Linienstück 0 I, I II oder II III stattfindet, ist sehr leicht zu entscheiden. Man darf nur die an einem seiner Enden wirkende, gegebene Kraft

P_1 oder P_2 in zwei Componenten zerlegen, deren Richtungen durch die in jenem Punkte zusammenstossenden Linienstücke vorgezeichnet sind. Wirkt die in die fragliche Linie fallende Componente von deren Endpunkt aus nach auswärts, so wird dieses Linienstück gezogen, ist sie aber einwärts gerichtet, so wird es gedrückt. So werden in den Figuren 12 und 13 sämmtliche Linienstücke 0 I, I II, II III gezogen, in Figur 14 gedrückt.

In dem Falle, wo ein Linienstück gezogen wird, darf es auch biegsam sein, nach Art eines Seils oder einer Kette, ohne dass das Gleichgewicht beeinträchtigt wird. Findet dies bei allen Linienstücken statt, so kann das ganze Polygon 0 I II III aus einem Seil oder einer Kette bestehen, in deren Eck- oder Knotenpunkten die Kräfte P_1, P_2 wirken. Im anderen Falle muss die Linie, die auf Druck angegriffen wird, steif sein. Wie dem aber auch sein mag, man nennt gewöhnlich den Linienzug 0 I II III das Seilpolygon aus den Kräften P_1 und P_2. Der Linienzug 0 1 2 ist das uns schon bekannte Kräftepolygon aus denselben; den willkürlich angenommenen Punkt C nennt man den Pol des Kräftepolygons.

Um also zwei sich schneidende oder parallele Kräfte in eine Resultante zu vereinigen, construirt man das Kräfte- und Seilpolygon aus ihnen. Zuerst das Kräftepolygon 0 1 2 (Fig. 12 bis 14), indem man sie von einem beliebigen Punkt 0 aus hintereinander ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach aufträgt. Alsdann nimmt man einen willkürlichen Punkt C als Pol und zieht zu den, von ihm aus in die Ecken des Kräftepolygons geführten Strahlen 0C, 1C, 2C beziehungsweise die Linien 0 I, I II, II III parallel, wobei die Lage der ersten beliebig ist, die zweite durch den Durchschnittspunkt I jener ersten mit der Kraft P_1 geht und die dritte durch den Durchschnittspunkt II der zweiten mit der zweiten Kraft P_2. Der Durchschnittspunkt a derjenigen Seite 0 I des Seilpolygons, welche der ersten Kraft vorangeht, mit der Seite II III, welche der zweiten Kraft folgt, ist ein Punkt der gesuchten Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale 0 2 im Kräftepolygon bestimmt ist, welche die beiden Kräfte unterspannt.

§. 21. Kräfte- und Seilpolygon für ein Gegenpaar und daraus folgende Eigenschaft desselben. — In Consequenz mit der oben angegebenen Bezeichnung nennt man auch in Fig. 15, Taf. I den Linienzug 0 I II III das Seilpolygon der beiden gleichen, parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_1 und P_2. In demselben ist die erste Seite 0 I parallel der dritten II III. Denkt man sich die Kräfte P_1 und P_2 in ihre vier Componenten 0C, C1, 1C und C2 zerlegt, von denen die beiden mittleren, in der Linie I II einander entgegengesetzt wirkenden sich aufheben, so bleiben in den parallelen Linien 0 I und II III die beiden, ebenfalls gleichen und entgegengesetzt gerichteten Componenten 0C und C2 übrig, welche wieder ein Gegenpaar bilden, das dieselbe Wirkung haben muss, wie das ursprüngliche. Daraus sieht man, dass ein Gegenpaar $P_1 P_2$ in ein anderes verwandelt werden kann, ohne dass seine Wirkung geändert wird; und es ist leicht, den sehr einfachen Zusammenhang aufzudecken, der zwischen diesen beiden Gegenpaaren stattfinden muss.

Trägt man auf die Schenkel des Winkels 0 I a, der dem Winkel 1 0 C im Kräftepolygon gleich ist, die Stücke I 0 und I a bezw. gleich C0 und 0 1 auf, so wird das Dreieck 0 I a dem Dreieck 0 1 C congruent, und daher 0a parallel mit 1 C und mit I II. Die Dreiecke I II a und I II 0 sind folglich an Flächeninhalt einander gleich. Das erste hat als Seite I a die eine der Kräfte des ursprünglichen Gegenpaars, und die gegenüberliegende Spitze II liegt in der Linie, in der die andere Kraft wirkt; sein Flächeninhalt ist dadurch vollkommen bestimmt; ebenso derjenige des zweiten, dessen eine Seite 0 I die eine der Kräfte des neuen Gegenpaars ist, und

dessen Spitze II in der anderen Kraft desselben liegt. Da die Flächeninhalte der beiden Dreiecke auch gleich den halben Produkten aus der Grösse der Kräfte der betr. Gegenpaare in die senkrechten Entfernungen derselben sind, so folgt hieraus der Satz: Ein Gegenpaar kann in seiner Ebene in beliebiger Weise verschoben und der Grösse und Richtung seiner Kräfte nach verändert werden, wenn nur der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die eine dieser Kräfte ist, und dessen gegenüberliegende Spitze in der anderen liegt, derselbe bleibt, oder wenn nur das Produkt aus der Grösse der Kräfte in ihre senkrechte Entfernung, welche man den Arm des Gegenpaars nennt, nicht geändert wird; natürlich muss auch die Richtung, in welcher das Gegenpaar die Ebene zu drehen sucht, die gleiche bleiben.

Wir werden später sehen, welche Bedeutung jener Flächeninhalt und dieses Produkt noch hat; aber soviel ist schon jetzt klar, dass ein Gegenpaar (oder eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft) in der Ebene, in welcher es liegt, vollständig bestimmt ist, wenn die Richtung angegeben wird, in der es dieselbe zu drehen sucht, und ausserdem jener Flächeninhalt oder die Grösse des Produkts, dem er proportional ist. Das Gegenpaar selbst kann dann durch irgend zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte dargestellt werden, wenn nur das Dreieck über einer von ihnen, dessen Spitze in der anderen liegt, den gegebenen Flächeninhalt hat, oder wenn nur das Produkt aus der Grösse dieser Kräfte in ihre senkrechte Entfernung dem gegebenen Produkte gleich ist.

§. 22. Kräfte- und Seilpolygon beliebig vieler Kräfte in einer Ebene. Das Verfahren, welches wir im Vorstehenden für die Zusammensetzung zweier sich schneidender oder paralleler Kräfte kennen gelernt haben, lässt sich sehr leicht auf den Fall ausdehnen, wo beliebig viele, in einer Ebene gelegene, sich schneidende oder parallele Kräfte zu vereinigen sind.

Kommt z. B. in Fig. 12, Taf. I zu den beiden dort vereinigten Kräften 1 und 2 noch eine dritte hinzu, so kann man dieselbe mit der Resultante 0 2 aus jenen ganz ebenso zusammenfassen, wie vorhin die zweite Kraft mit der ersten. Man wird also an den Endpunkt 2 diese dritte Kraft ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach anfügen, den Strahl 3 C durch den Pol C und den Endpunkt der dritten Kraft ziehen und parallel mit diesem durch den Durchschnittspunkt III der vorhergehenden Seilpolygonseite II III mit der dritten Kraft die nächste Seilpolygonseite III IV. Der Durchschnitt derselben mit der ersten Seilpolygonseite 0 I gibt einen Punkt, durch den die Resultante P_{1-3} hindurchgehen muss, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch die Diagonale dargestellt ist, welche die Kräfte 1 bis 3 unterspannt.

Man wird also z. B., um die gegebenen neun Kräfte P_1, P_2 ..... P_9 (Fig. 16, Taf. II) zu vereinigen, ein Kräftepolygon 0 1 2 3...9 zeichnen, indem man sie von einem beliebigen Punkt 0 aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hintereinander aufträgt. Man wird dann einen beliebigen Punkt C in der Ebene jenes Polygons als Pol nehmen und durch ihn und die Eckpunkte 0, 1, 2... des letzteren die Strahlen C0, C1, C2 etc. legen. Parallel zu diesen Strahlen laufen dann die Seiten des Seilpolygons. Die erste Seite desselben 0I, parallel zum Strahl 0C, hat eine beliebige Lage. Durch ihren Schnittpunkt I mit der Kraft P_1 zieht man die Seilpolygonseite I II parallel zum Strahl 1C bis an die Linie, in welcher die Kraft P_2 wirkt; durch den Punkt II wird alsdann die Seite II III parallel dem Strahl 2C gezogen u. s. w. f. Bei dem Zusammenhang, in welchem die Bezeichnung der Ecken des Seil- mit derjenigen der Ecken des Kräftepolygons steht, kann das erstere aus letzteren ganz mechanisch construirt werden.

Die Seiten 0 I, I II, II III...... IX X
des Seilpolygons sind bezw. parallel zu den Strahlen
0C, 1C, 2C.........9C
im Kräftepolygon.

Die Resultante sämmtlicher neun Kräfte ist ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach durch die Diagonale 0 9 des Kräftepolygons bestimmt, welche sämmtliche neun Kräfte unterspannt, d. h. den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkt der letzten verbindet. Desshalb ist auch hier wieder (vgl. §. 9) die Projektion der Resultante auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projektionen der Componenten auf dieselbe Linie. Die Lage der Resultante ergibt das Seilpolygon; sie muss nämlich durch den Punkt X hindurch gehen, in welchem sich die äussersten Seilpolygonseiten, die der Kraft P_1 vorangehende 0 I und die der Kraft P_9 nachfolgende IX X schneiden.

§. 23. Aber nicht blos die Resultante sämmtlicher gegebener Kräfte, die in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, kann man mittelst des im vorigen §. gezeigten Verfahrens durch Construktion des Kräfte- und Seilpolygons finden, sondern auch mit derselben Leichtigkeit diejenige einer beliebig ausgewählten Anzahl jener Kräfte, wenn sie nur unmittelbar aufeinander folgen. Grösse, Richtung und Sinn dieser Resultante ist immer durch die Diagonale bestimmt, welche im Kräftepolygon die betr. Kräfte unterspannt, und ihre Lage ist allemal dadurch bekannt, dass sie durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, derjenigen, welche der ersten von den zu vereinigenden Kräften vorangeht mit derjenigen, welche der letzten derselben nachfolgt, hindurch gehen muss.

Die Resultante der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_6$ also ist nach Grösse, Richtung und Sinn gleich der Diagonale 0 6 des Kräftepolygons und geht durch den Schnittpunkt a der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und VI VII hindurch; und die Resultante der Kräfte $P_3 \ldots P_8$ ist gleich der Diagonale 2 8 und geht durch den Schnittpunkt b der äussersten Seilpolygonseiten II III und VIII IX.

§. 24. Denkt man sich jede der Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ (Fig. 16, Taf. II) in dem Eckpunkte des Seilpolygons, der auf ihr liegt, nach den Richtungen der dort zusammenstossenden Seiten dieses Polygons in zwei Componenten zerlegt, so erhält man Grösse, Richtung und Sinn dieser Componenten unmittelbar aus dem Kräftepolygon. Die Componenten der Kraft 1 sind 0C und C1, die der Kraft 2 sind 1C und C2, die der Kraft 3 sind 2C und C3 u. s. w. f. In jede Seilpolygonseite, mit Ausnahme der ersten und letzten, kommen also zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Componenten zu liegen, die sich das Gleichgewicht halten und als Zug- oder Druckspannungen der betr. Seite betrachtet werden können. Die in die erste und letzte Seite fallenden beiden Componenten können also alle gegebenen Kräfte ersetzen, und dies ist wieder ein Beweis dafür, dass die Resultante der letzteren durch den Durchschnittspunkt jener äussersten Seilpolygonseiten hindurch gehen muss.

Indem man den in die erste und letzte Seite fallenden Componenten gleiche Kräfte entgegensetzt, kann man das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht halten. Zu diesem Gleichgewicht ist dann nur ein solcher Zusammenhang erforderlich, wie er durch feste, mit den Seilpolygonseiten zusammenfallende und in dessen Eckpunkten wie um Scharniere bewegliche Linien erreicht wird; und wenn eine solche Linie Zugspannungen erleidet, so kann sie sogar noch vollkommen biegsam wie ein Stück Seil oder Kette sein, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Es ist aber leicht zu entscheiden, ob eine Seite des Seilpolygons gedrückt oder gezogen wird.

Man darf nur die, an einem ihrer Endpunkte wirkende Kraft P nach den Richtungen der in diesem Punkte zusammenstossenden Seiten in zwei Componenten zerlegen. Wirkt die in die betrachtete Seite treffende Componente von dem Endpunkte aus, an den man zerlegt hat, nach auswärts, so findet Zug, wirkt sie aber nach einwärts, so findet Druck in jener Seite statt. Die Grösse dieser Zug- oder Druckspannung ist gleich der Länge des Strahls im Kräftepolygon, zu dem die betrachtete Seilpolygonseite parallel ist.

In gleicher Weise können irgend zwei Strahlen 3C und C8 im Kräftepolygon, in passendem Sinne genommen, als Componenten der Kraft 3 8 betrachtet werden, welche ihre Endpunkte 3 und 8 verbindet. Diese Verbindungslinie stellt aber der Grösse, Richtung und dem Sinne nach auch die Resultante der Kräfte 4, 5...8 vor, welche vom Endpunkte des ersteren Strahles aus bis zum Endpunkte des zweiten an einander gereiht worden sind. Daher kann die Resultante einer Anzahl aufeinanderfolgender Kräfte auch als Mittelkraft der Spannungen in den beiden äussersten, diesen Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten betrachtet werden.

§. **25.** Unter den Kräften, welche in Fig. 16, Taf. II vermittelst des Kräfte- und Seilpolygons in eine Resultante vereinigt wurden, befinden sich solche, welche sich schneiden, dann parallele, und zwar sowohl gleich- als entgegengesetzt gerichtet, und endlich auch ein Gegenpaar $P_6 P_7$. Dies alles hat nicht den geringsten Einfluss auf die Construktion. Es kommt blos darauf an, dass jede Seilpolygonseite die auf sie folgende Kraft P schneidet. Da aber jede solche Seite parallel mit dem Strahl im Kräftepolygon ist, der vom Pol nach dem Anfangspunkte der auf sie folgenden Kraft geht, so ist jene Bedingung allgemein erfüllt, wenn nur der Pol des Kräftepolygons in keine der verlängert gedachten Seiten desselben fällt. Es steht nichts im Wege, dem Pol stets eine solche Lage zu geben.

§. **26. Einfluss eines Gegenpaars bei der Zusammensetzung desselben mit Kräften in seiner Ebene.** — Von besonderem Interesse ist es, den Einfluss kennen zu lernen, welchen das Gegenpaar $P_6 P_7$ (Fig. 16, Taf. II) bei der Zusammensetzung mit den übrigen Kräften ausübt. Das Kräftepolygon zeigt hier zunächst, dass, in Folge des Zusammenfallens der Ecke 7 mit der 5, weder die dem Gegenpaar vorausgehende Kraft P_5 oder 4 5, noch die Resultanten 3 5, 2 5, 1 5.... aus den vorangehenden Kräften P_5, P_4, P_3... durch Vereinigung mit dem Gegenpaar $P_6 P_7$ ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach geändert werden. Sie werden blos parallel mit sich selbst verschoben, und zwar, wie das Seilpolygon zeigt, die Kraft P_5 von V nach e, die Resultante P_{1-5} von c nach d u. s. w. Ebenso wird die dem Gegenpaar vorangehende Seilpolygonseite V VI parallel mit sich selbst nach VII VIII verschoben, wenn das Gegenpaar mit den vorangehenden Kräften vereinigt wird; und es ist dies letztere im Grunde genommen auch nichts weiter als das parallele Verschieben einer Kraft in Folge ihrer Zusammensetzung mit dem Gegenpaar, der Kraft C5 nämlich, welche die, aus der Zerlegung der Kraft P_5 hervorgehende Spannung der zu verschiebenden Polygonseite darstellt.

Nun ist aber nach §. 21 ein Gegenpaar in einer gegebenen Ebene allein schon durch den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt, dessen Grundlinie die eine seiner Kräfte ist, und dessen Spitze in der anderen liegt, vorausgesetzt dass die Drehrichtung noch gegeben wird. Es kann daher vorkommen, dass man ein, blos auf diese Art bestimmtes Gegenpaar mit anderen Kräften in seiner Ebene vereinigen soll oder auch nur mit einer einzigen, und es ist in diesem Falle offenbar wünschenswerth, die Parallelverschiebungen, welche es hervorbringt, construiren zu können, blos aus jenen Angaben, ohne das Gegenpaar wirklich durch zwei gleiche, parallele und entgegen-

gesetzt gerichtete Kräfte repräsentiren und diese in gewöhnlicher Weise in die Construktion mit aufnehmen zu müssen. Dass dies möglich ist, lässt sich leicht zeigen, wobei wir uns blos auf den Fall, auf den wir oben alle anderen zurückgeführt haben, zu beschränken brauchen, auf den nämlich, wo das Gegenpaar mit einer einzigen Kraft A P (Fig. 17, Taf. II) zu vereinigen ist.

Denken wir uns nämlich nach §. 21 das gegebene Gegenpaar so verwandelt, dass die Grösse seiner Kräfte gleich derjenigen der gegebenen Kraft P ist, und verschieben wir dasselbe so, dass eine seiner Kräfte in dieselbe gerade Linie fällt, in der P wirkt, und dass sie dieser entgegengesetzt ist, dann heben sich die Kräfte A P und A P′ auf, und es bleibt nur noch die der Kraft P an Grösse, Richtung und Sinn gleiche P″ übrig, welche also keine andere als die parallel mit sich selbst verschobene Kraft P ist. Dabei muss das Dreieck A P′ A″ oder auch das A P A″ an Flächeninhalt gleich demjenigen sein, durch welches das Gegenpaar gegeben ist. Man darf also nur über der zu verschiebenden Kraft als Grundlinie ein Dreieck A P A″ errichten, dessen Flächeninhalt gleich dem des Dreieckes ist, durch welches das Gegenpaar gegeben wird, um in der Spitze A″ dieses Dreieckes einen Punkt zu erhalten durch welchen die in Folge ihrer Vereinigung mit dem Gegenpaar parallel verschobene Kraft gehen muss. Die Seite, nach welcher hin dabei das Dreieck A P A″ über seiner Grundlinie errichtet wird, nach welcher hin also die gegebene Kraft verschoben wird, ist durch die gegebene Drehrichtung des Gegenpaars bedingt. Denkt man sich in der Spitze des Dreiecks eine Kraft parallel mit der gegebenen und in demselben Sinne wirkend, in seiner Grundlinie eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte, so muss das durch beide gebildete Gegenpaar dieselbe Drehrichtung haben wie das gegebene. Diese Drehrichtung wird gewöhnlich durch einen Kreispfeil, wie er in Fig. 17 eingezeichnet ist, angedeutet.

Wenden wir nun dies beispielshalber dazu an, um in Fig. 16, Taf. II die parallele Verschiebung der Seilpolygonseite V VI durch das Gegenpaar $P_6 P_7$, welches durch das Dreieck $A_6 P_6 P_7$ und durch den in dasselbe gezeichneten Kreispfeil gegeben sei, direkt zu construiren. Dann haben wir uns in der Seite V VI eine der Kraft C5, also dem Strahl, zu dem sie parallel ist, gleiche, und in demselben Sinne gerichtete Kraft wirkend zu denken und irgendwie, etwa als V h in sie einzutragen. Von demselben Punkte V aus und nach derselben Richtung hin trägt man dann die Seite $P_6 A_6$ des Dreiecks $A_6 P_6 P_7$ auf die nämliche Linie als V m auf und errichtet darüber das letztere Dreieck als V m n. Dabei hat man darauf zu achten, dass die Spitze n auf die Seite von V h zu liegen kommt, nach welcher hin die Kraft V h oder C5 verschoben werden muss, um die nämliche Drehrichtung um einen Punkt ihrer früheren Lage zu erhalten, wie sie der Kreispfeil des Dreiecks $A_6 P_6 P_7$ angibt. Dann hat man blos noch das Dreieck V m n in ein anderes, an Flächeninhalt ihm gleiches V h k zu verwandeln, dessen Grundlinie V h = C5 ist, was durch Ziehen der Linie n h und der mit ihr parallelen m k leicht geschehen kann. Die Spitze k des verwandelten Dreiecks V h k ist dann der Punkt, durch welchen die verschobene Polygonseite, nämlich VII VIII, hindurch gehen muss. Indem man auf diese Weise direkt von der Seite V VI auf die VII VIII übergeht, kann man sich auch vorstellen, dass das Seilpolygon von der Ecke V aus in der Richtung V VI bis ins Unendliche gehe, dort mit der unendlich kleinen und unendlich fernen Kraft; als welche das Gegenpaar auch betrachtet werden kann, verbunden werde und parallel mit sich selbst verschoben als VII VIII wieder zurückkehre.

§. 27. **Die Reihenfolge bei der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene ist gleichgiltig.** — Die Ordnung, in welcher Kräfte einer und derselben Ebene an beliebigen Angriffspunkten vermittelst des Kräfte- und Seilpolygons miteinander verbunden werden, ist gleichgiltig. Das kann leicht erwiesen werden, und zwar können wir uns dabei auf den Fall beschränken, dass

zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Kräfte mit einander vertauscht werden, weil durch eine solche fortgesetzte Vertauschung aus jeder Anordnung jede andere erhalten werden kann.

Die beiden miteinander zu vertauschenden Kräfte seien beispielweise die P_4 und P_5 (Fig. 18, Taf. II), welche entweder allein vorhanden sein, oder einem System von mehreren, zum Theil vorausgehenden, zum Theil nachfolgenden Kräften angehören können. Jedenfalls haben wir blos denjenigen Theil 3 4 5 (Fig. 18_a)) des Kräftepolygons, dessen Pol C sei, zu betrachten, welcher aus den zu den Kräften parallel gezogenen und ihnen an Grösse und Sinn gleichgemachten Linien 3 4 und 4 5 besteht, wie wir auch vom Seilpolygon nur den Theil III IV V VI ins Auge zu fassen haben, welcher jenem Stück des Kräftepolygons entspricht, in der bekannten Weise, dass III IV parallel mit 3 C, IV V parallel mit 4 C und V VI parallel mit 5 C ist.

Bei der Vertauschung der Kräfte 4 und 5 mit einander, haben wir im Kräftepolygon an den Punkt 3 die neue Kraft 3 4′ gleich P_5 anzureihen und an den Endpunkt 4′ derselben die neue Kraft 4′ 5′ gleich P_4. Der Endpunkt 5′ dieser letzteren muss, wie sofort ersichtlich, mit dem Punkt 5 zusammenfallen, und von da aus nimmt also das Kräftepolygon seinen früheren Verlauf, als ob jene Vertauschung nicht vorgenommen worden wäre. — Im Seilpolygon bleibt III IV parallel mit 3 C, muss aber bis zum Durchschnittspunkt IV′ mit der Kraft P_5, die jetzt $P_{4'}$ heisst, verlängert werden. Durch diesen Durchschnittspunkt hat man dann IV′ V′ parallel mit 4′ C bis zum Schnitt V′ mit der Kraft P_4, jetzt $P_{5'}$, zu ziehen und durch diesen Punkt endlich eine Parallele V′ VI mit dem Strahl 5 C. Es ist zu beweisen, dass diese letztere Linie nicht blos parallel mit der V VI ist, sondern mit ihr zusammenfällt, und dieser Beweis ist geliefert, wenn dargethan wird, dass beide einen Punkt gemeinschaftlich haben. Dies ist aber sehr leicht: Die Resultante der beiden Kräfte P_4 und P_5 geht durch den Durchschnittspunkt f ihrer äussersten Seilpolygonseiten III IV und V VI; ebenso geht die Resultante der Kräfte $P_{4'}$ und $P_{5'}$, welches dieselben, wie die vorigen sind, durch den Durchschnittspunkt ihrer äussersten Seilpolygonseiten III IV′ und V′ VI. Aber III IV′ stimmt in Richtung und Lage mit III IV überein; wäre also der letztere Durchschnittspunkt von jenem f verschieden, so müsste er doch auf die Linie III IV′ fallen, und daher die Resultante der beiden Kräfte der Richtung und Lage nach mit dieser letzteren Linie übereinstimmen. Das ist aber nicht möglich; denn diese Linie schneidet die Kräfte P_4 und P_5 unserer Voraussetzung nach in zwei verschiedenen Punkten IV und IV′, während doch deren Resultante durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt a hindurchgehen oder, wenn ein solcher nicht vorhanden ist, zu ihnen parallel sein muss. Die Durchschnittspunkte der beiden parallelen Linien V VI und V′ VI mit der III IV′ fallen also zusammen, das gleiche gilt somit für jene Linien selbst, und es nimmt folglich das Seilpolygon von V an denselben Verlauf, ob jene Vertauschung der Kräfte P_4 und P_5 vorgenommen wird oder nicht.

§. 28. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene; Fall, wo blos das Kräfte- und nicht auch das Seilpolygon sich schliesst. — Damit Kräfte, welche in einer und der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, im Gleichgewicht sind, muss die Resultante aus allen, mit Ausnahme der letzten, gleich dieser letzten und in derselben geraden Linie ihr entgegengesetzt sein. In Folge dessen schliesst sich das Kräftepolygon, das aus diesen Kräften construirt wird. Es fallen also der erste, d. h. der vom Pol nach dem Anfangspunkt der ersten Kraft gehende Strahl, und der letzte, nämlich der nach dem Endpunkte der letzten Kraft gehende, zusammen. Die zu diesen Strahlen parallelen Seilpolygonseiten, die vor der ersten Kraft liegende und die auf die letzte Kraft folgende, müssen also mindestens parallel sein. Aber dies reicht allein nicht aus. Denn da die Resultante aus allen Kräften weniger der letzten mit

dieser in derselben geraden Linie liegen muss, so muss der Durchschnittspunkt der ersten Polygonseite mit derjenigen, welche auf die vorletzte Kraft folgt, der Punkt also, durch den jene Resultante hindurch gehen muss, auf der geraden Linie liegen, welche die letzte Kraft enthält. Durch diesen Punkt, als den Durchschnittspunkt der auf die vorletzte Kraft folgenden Polygonseite mit der letzten Kraft, muss die nächste, also letzte Polygonseite gehen, und da diese parallel mit der ersten sein muss, so fällt sie mit derselben zusammen. — Die auf die letzte Kraft folgende Polygonseite muss also mit der ersten zusammenfallen oder das Seilpolygon muss sich, wie man sagt, auch schliessen.

Nimmt man zu den neun Kräften P_1, P_2, . . . P_9 in Fig. 16, Taf. II noch eine zehnte, P_{10}, hinzu, welche der Resultante P_{1-9} oder 0 9 jener Kräfte gleich, aber in derselben geraden Linie entgegengesetzt ist, im Kräftepolygon also durch 9 0 der Grösse, Richtung und dem Sinne nach dargestellt wird, so schliesst sich das Kräftepolygon 0 1 2 . . . . 8 9 0, und die auf die letzte Kraft P_{10} folgende Seilpolygonseite X 0 fällt mit der ersten 0 I zusammen; das Seilpolygon schliesst sich auch.

Damit Kräfte, welche in einer und derselben Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, im Gleichgewicht sind, muss sich sowohl das Kräfte- als auch das Seilpolygon, das aus ihnen construirt werden kann, schliessen.

Wenn sich das Kräftepolygon nicht schliesst, so haben sämmtliche Kräfte eine Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons dargestellt ist. Ihre Lage ist bekanntlich im Seilpolygon dadurch bestimmt, dass sie durch den Schnittpunkt der ersten mit der auf die letzte Kraft folgenden Seilpolygonseite gehen muss. Ein solcher Schnittpunkt wird aber allemal erhalten, wenn nicht zufällig, wie z. B. in Fig. 19, Taf. II der Anfangspunkt 0, der Endpunkt 4 und der Pol C des Kräftepolygons in eine gerade Linie zu liegen kommen. Dann werden jene Seilpolygonseiten 0 I und IV V parallel. Wie dann die Lage der Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn immer noch durch 0 IV im Kräftepolygon dargestellt wird, zu finden ist, sieht man leicht, wenn man wie in §. 24 alle Kräfte P_1, P_2 . . . P_4 in Componenten nach den Richtungen der Seilpolygonseiten, die in ihnen sich schneiden, zerlegt. Diese Componenten heben sich alle paarweise auf, bis auf die in der ersten und letzten Seite wirkenden, deren Grösse, Richtung und Sinn durch 0 C, bezw. C 4 vorgestellt sind. Auf diese beiden parallelen Kräfte sind also dann die gegebenen zurückgeführt, und es können dieselben auf bekannte Weise in eine Resultante vereinigt werden, die dann die Resultante der gegebenen Kräfte ist; zweckmässiger jedoch würde es sein, anstatt des Poles C im Kräftepolygon einen andern, der eine solche spezielle Lage wie jener nicht mehr hat, anzunehmen, oder diese besondere Lage des Pols von vornherein zu vermeiden.

Die Componenten, welche in den zu einander parallen Seiten 0 I und IV V des Seilpolygons in Fig. 19 wirken, sind aber dann nicht mehr in eine Resultante zu vereinigen, wenn sie einander gleich und entgegengesetzt sind. Das kann aber nur dann stattfinden, wenn der Endpunkt des Kräftepolygons in den Anfangspunkt desselben zu liegen kommt, wenn sich also wie z. B. in Fig. 20, Taf. II das Kräftepolygon schliesst. Schliesst sich dann das Seilpolygon nicht auch, in welchem Falle die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht wären, sondern ist die letzte Seite IV V nur parallel mit der ersten, so wirken in diesen beiden Linien zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, ein Gegenpaar, auf welches die sämmtlichen Kräfte zurückgeführt werden können. Jene Kräfte sind an Grösse und Richtung gleich dem Strahl im Kräftepolygon, der den zusammenfallenden Anfangs- und Endpunkt desselben mit dem Pol verbindet. Ihr Sinn ist durch Zerlegung

der ersten oder letzten der gegebenen Kräfte leicht zu erhalten. Er ist für die in der ersten Seilpolygonseite wirkende Kraft der vom Anfangspunkt des Kräftepolygons nach dem Pol desselben gerichtete, für die in der letzten Seilpolygonseite der entgegengesetzte.

Wenn folglich das Kräftepolygon gegebener, in einer und derselben Ebene gelegener Kräfte sich schliesst, oder wenn im Kräftepolygon solcher Kräfte eine Schleife vorkommt, der Art, dass der Endpunkt einer Kraft mit dem Anfangspunkt einer vorhergehenden zusammenfällt, und das Seilpolygon aus diesen Kräften schliesst sich nicht ebenfalls, sondern die diesen Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten sind blos parallel, fallen nicht zusammen, so lassen sich jene Kräfte nicht in eine Resultante vereinigen, sondern nur auf ein Gegenpaar zurückführen. Die Kräfte dieses Gegenpaares liegen in den parallelen Seilpolygonseiten, ihre Grösse ist gleich dem Strahl im Kräftepolygon, der von dem zusammenfallenden Anfangs- und Endpunkt nach dem Pol gezogen wird, und ihr Sinn ist durch Zerlegung entweder der ersten oder letzten der in Betracht kommenden Kräfte nach den in ihnen zusammenstossenden Seilpolygonseiten leicht zu erhalten.

§. 29. Zusammenhang zwischen den beiden Seilpolygonen, welche aus verschiedenen Polen eines und desselben Kräftepolygons construirt werden. — Der Pol des Kräftepolygons, welches aus gegebenen Kräften in einer Ebene behufs ihrer Zusammensetzung construirt wird, kann beliebig angenommen werden. Mit seiner Lage hängt aber auf's innigste die Gestalt des zugehörigen Seilpolygons zusammen. Wenn in einem Kräftepolygon 0 1 2 3 4 (Fig. 21, Taf. II) anstatt des Poles C, welchem das Seilpolygon 0 I II III IV V entspricht, ein anderer Punkt C' als Pol genommen wird, so entspricht diesem ein anderes Seilpolygon 0' I' II' III' IV' V'. Hier entsteht nun die Frage, in welchem Zusammenhange die beiden Seilpolygone, welche einem und dem nämlichen Kräftepolygon, aber verschiedenen Polen zugehören, mit einander stehen? Es ist leicht zu erweisen, dass die Durchschnittspunkte der gleichvielten oder gleichnamigen Seiten solcher Seilpolygone in einer und derselben geraden Linie liegen müssen, welche zu der Verbindungslinie der beiden Pole im Kräftepolygone parallel ist. Die Lage jener Linie ist durch diese letztere Angabe noch nicht bestimmt, kann es auch nicht sein, weil ja die erste Seite 0' I' des zweiten Seilpolygons ihrer Lage nach so gut beliebig angenommen werden kann wie die erste Seite 0 I des ersten. Sind aber einmal diese ersten Seiten angenommen, so geht durch ihren Durchschnittspunkt hindurch jene zur Verbindungslinie der Pole parallele Linie, auf der sich auch die übrigen gleichvielten Seilpolygonseiten schneiden, und welche also nun vollkommen bestimmt ist.

Der Beweis für den oben ausgesprochenen Satz ist unter anderem in folgender Weise zu führen. Zerlegt man die Kraft P_1 einmal nach den in ihr zusammentreffenden Seilpolygonseiten 0 I und I II, dann nach denen 0' I' und I' II' in je zwei Componenten, so sind dieselben im Kräftepolygon der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch die Strahlen 0 C und C 1 das einemal und 0 C' und C' 1 das zweitemal bestimmt. Nimmt man die beiden, in 0' I' und I' II' wirkenden Componenten im entgegengesetzten Sinne, so halten sie den beiden anderen, n 0 I und I II liegenden das Gleichgewicht. Die Resultante aus irgend zweien von diesen vier Kräften, etwa diejenige der in 0 I und 0' I' liegenden, muss daher der aus den andern beiden, in I II und I' II' gelegenen gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt sein, und diese gerade Linie ist offenbar die Verbindungslinie ab der Schnittpunkte der Geraden 0 I und 0' I' einerseits und I II und I' II' andererseits. Nun ergibt aber das Kräftepolygon, dass die Resultante der beiden Kräfte C' 0 und 0 C, welche in den Seilpolygonseiten 0' I' und 0 I liegen, der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch C'C dargestellt ist, sowie die Resultante der Componenten

C 1 und 1 C', welche in den Seilpolygonseiten I II und I' II' liegen, der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch C C' repräsentirt wird. Die Linie a b, in welcher jene beiden Resultanten liegen müssen, muss also nothwendig zur Linie C C' parallel sein.

In ganz gleicher Weise kann für die zweite Kraft P_2 bewiesen werden, dass die Verbindungslinie b c der Durchschnittspunkte der Seiten I II und I' II' einerseits und II III und II' III' andererseits ebenfalls zur Linie CC' im Kräftepolygon parallel sein muss; sie fällt also mit der a b zusammen. In gleicher Weise kann für die übrigen Schnittpunkte d, e... fortgefahren werden.

Anmerkung. Auf rein geometrischem Wege ist der in Rede stehende Beweis folgendermassen zu führen: In den beiden vollständigen Vierecken 0 1 C' C und a b I' I sind fünf Paar entsprechender Seiten parallel zu einander, nämlich 0 1 zu I I', 1 C' zu b I', C 0 zu I a, 0 C' zu a I' und 1 C zu b I; es müssen also auch die sechsten Seiten, nämlich b a und C' C, parallel zu einander sein. In gleicher Weise haben die vollständigen Vierecke 1 2 C C' und c b II' II je fünf entsprechende, leicht aufzufindende Seiten, die beziehungsweise parallel sind, weshalb es auch die sechsten, nämlich b c und C' C, sein müssen. b c muss also mit a b zusammenfallen u. s. w. f.

Der eben bewiesene Satz kann vor Allem dazu benützt werden, um das eine 0' I' II'... von zwei Seilpolygonen, welche einem und dem nämlichen Kräftepolygon 0 1 2 3 ..., aber verschiedenen Polen C' und C angehören, auf leichte und bequeme Weise aus dem andern 0 I II... zu construiren. Zu diesem Behufe zieht man, nachdem man die erste Seite 0' I' des zweiten Polygons willkürlich angenommen, durch ihren Durchschnittspunkt a mit der entsprechenden Seite 0 I des ersten Polygons eine, zur Verbindungslinie C' C der Pole parallele Linie M N. Die zweite Seite I' II' des neuen Polygons muss dann durch den Schnittpunkt I' der ersten Seite mit der ersten Kraft P_1 und durch den Punkt b gehen, in welchem die zweite Seite des ersten Polygons die Linie M N schneidet, ist also dadurch vollständig bestimmt. Die Linie b I' wird, wo nöthig, bis zum Schnittpunkt II' mit der Kraft P_2 verlängert und alsdann durch diesen Punkt und den Schnittpunkt c der dritten Seite II III des ersten Polygons mit der Linie M N die dritte Seite II' III' des neuen Polgons gezogen u. s. w. f.

§. 30. **Das Seilpolygon als Mittelkraftslinie.** — Unter den verschiedenen Lagen, welche der Pol des Kräftepolygons annehmen kann, sind diejenigen besonders interessant, wo er in eine der Ecken jenes Polygons fällt. Die von ihm aus gezogenen Strahlen werden dann zum Theil Seiten, zum grössten Theil aber Diagonalen des Kräftepolygons und stellen folglich der Grösse, Richtung und dem Sinne nach die Resultanten der Kräfte dar, welche vom Pol aus bis zum Ende des betreffenden Strahls aneinander gereiht sind. Es ist leicht zu beweisen, dass jene Resultanten in den Seilpolygonseiten liegen, welche den ihnen entsprechenden Strahlen parallel sind. Wir nehmen zu diesem Behufe den Pol C (Fig. 22, Taf. III) des Kräftepolygons 0 1 2 ..... 8 aus den acht Kräften P_1 P_2 ... P_8 im Anfangspunkte 0 des Polygons an. Dadurch verliert unsere Beweisführung nichts an Allgemeinheit, denn es können ja der Kraft P_1 noch beliebig viele andere Kräfte vorausgehen. Der Strahl 0 C, zu welchem die erste Seilpolygonseite 0 I parallel sein müsste, reducirt sich in Folge jener Annahme auf einen Punkt. Es ist also nicht blos die Lage, sondern auch die Richtung jener Seilpolygonseite willkürlich. Aber diese Willkürlichkeit hat keinen Einfluss auf den ferneren Verlauf des Polygons, da die zweite Seilpolygonseite I II, durch irgend einen Punkt I der Kraft P_1 gehend, parallel mit 1 C zu ziehen ist und daher mit P_1 zusammenfällt. Der Eckpunkt II des Seilpolygons ist folglich auf jeden Fall der Durchschnittspunkt der Kraft P_1 mit der P_2. Durch II geht die dritte Seilpolygonseite II III, parallel zum Strahl oder

zur Diagonale 2 C, bis zum Schnittpunkt III mit der Kraft P_3, und so kann man nun ganz in der früheren Weise die Construktion des Seilpolygons 0 I II III .... IX fortsetzen.

Die erste Seite 0 I desselben ist ganz beliebig und kann daher auch fortgelassen werden; die in sie treffende Componente, wenn P_1 in die bekannten zwei Seitenkräfte zerlegt wird, ist Null. Die zweite Seite I II fällt in dieselbe gerade Linie wie die Kraft P_1, und die in sie treffende Componente oder Spannung ist diese Kraft P_1 selbst. Die Resultante aus den Kräften P_1 und P_2 muss durch den Durchschnittspunkt der Seilpolygonseite II III mit der beliebigen Seite 0 I, also durch jeden Punkt der ersteren gehen; das kann sie aber auch, da sie parallel mit der Diagonale 2 C sein, also ganz in die Linie II III fallen muss. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Resultante P_{1-3} in der Seilpolygonseite III IV, die P_{1-4} in der Seilpolygonseite IV V u. s. w. f. liegt, und dass endlich die letzte Seilpolygonseite VIII IX die Resultante sämmtlicher Kräfte enthält, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch 0 8 dargestellt ist.

Ein solches Seilpolygon heisst daher mit Recht die **Mittelkraftslinie** (Mitteldruckslinie) der Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_8$. Es wird erhalten, wenn man den Pol im Kräftepolygon in den Anfangspunkt der ersten Kraft legt und dann wie bei jedem anderen Seilpolygon construirt.

Die mit einer späteren Kraft P_3 beginnenden Mittelkräfte P_{34}, P_{3-5} etc. fallen natürlich nicht mehr in die Seiten jenes Polygons. Sie gehen einfach, wie es im Allgemeinen der Fall sein muss, durch die Schnittpunkte der Seite II III mit denen IV V, V VI etc. und sind den Diagonalen 2 4, 2 5 etc. gleich, mit ihnen parallel und im nämlichen Sinne gerichtet.

Will man die Mittelkraftslinie der Kräfte P_3, P_4 .... construiren, so muss man den Pol C′ im Kräftepolygon in den Anfangspunkt 2 der jetzigen ersten Kraft P_3 legen und dann wie oben verfahren. Der Theil der früheren Mittelkraftslinie, welche den Kräften P_3, P_4 ..... entspricht, nämlich II III .... IX, und die neue Mittelkraftslinie haben dann offenbar den nämlichen Zusammenhang wie zwei Seilpolygone, welche dem nämlichen Kräftepolygon 2 3 4 ... 8 angehören, aber aus verschiedenen Polen C und C′ construirt sind. Ihre gleichvielten Seiten schneiden sich auf der nämlichen, zur Verbindungslinie C C′ der Pole parallelen Geraden. Die erste Seite II′ III′ der neuen Mittelkraftslinie ist wieder beliebig, die zweite Seite III′ IV′ fällt mit der ersten Kraft P_3 zusammen, schneidet also die gleichvielte Seite III IV des alten Polygons in III. Jene Linie also, auf welcher sich die gleichvielten Seiten der beiden Polygone schneiden müssen, welche durch den Punkt III gehen und parallel zu C C′ oder 0 2 sein muss, ist keine andere als die Seite II III, in der die Mittelkraft der vorausgehenden Kräfte P_1 und P_2 liegt. Mit Hülfe dieser Linie kann man dann auf die, bereits im vorigen §. gelehrte Weise die zweite Mittelkraftslinie aus der ersten sehr leicht und bequem construiren. Nachdem man die Ecke IV′ des neuen Polygons als Schnittpunkt der Kraft P_3 mit der P_4 gefunden hat, kann man die Seite IV′ V′ sofort durch diesen Punkt und durch den Schnittpunkt a der Seite IV V mit der Linie II III ziehen; sie muss von selbst parallel zu 2 4 werden. Durch ihren Schnittpunkt V′ mit der Kraft P_5 und durch den Schnittpunkt b der Seite V VI mit der II III geht dann die Seite V′ VI′ u. s. w. f.

§. 31. Zwei ebene Kräftesysteme, in welchen eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich ist. — Fassen wir nun noch den Fall in's Auge, wo zwei ebene Kräftesysteme eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich haben. Kann die Ordnung, in welcher man die Kräfte mit einander vereinigt, beliebig genommen werden in beiden Systemen, so ist das natürlichste, zuerst die denselben gemeinschaftlichen Kräfte miteinander zu verbinden und hierauf in jedem System

die nicht gemeinschaftlichen anzufügen. Die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Stücke der Kräfte- und Seilpolygone können dann ganz zusammenfallend gemacht werden, wenn man im ersteren ein und den nämlichen Punkt als Pol nimmt und die letzteren mit einer und derselben geraden Linie als erste Seite beginnt. Wenn aber in den Kräftepolygonen verschiedene Punkte als Pole angenommen werden, so sind die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Seilpolygonstücke in demselben Fall wie die in §. 29 behandelten Seilpolygone, und lässt sich daher das dort Entwickelte unmittelbar auf sie anwenden.

Aber es ist nicht immer thunlich, alle die gemeinschaftlichen Kräfte zuerst zu vereinigen. Es ist oft nothwendig, die nicht gemeinschaftlichen Kräfte vorweg zu nehmen, oder auch nur einen Theil der gemeinschaftlichen, worauf die ungemeinschaftlichen folgen müssen, nach denen alsdann erst der andere Theil der gemeinschaftlichen Kräfte kommen kann. Dies letztere ist z. B. der Fall, wenn in einem Kräftesystem P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.... einige Kräfte z. B. die P_3 und P_4 in andere, $P_{3'}$, $P_{4'}$ von anderer Grösse und Richtung abgeändert werden sollen, ohne dass die Reihenfolge der Zusammensetzung eine andere wird. Man hat es dann mit den Kräftesystemen P_1, P_2, P_3, P_4, P_5..... und P_1, P_2, $P_{3'}$, $P_{4'}$, P_5.... zu thun, in denen zuerst einige gemeinschaftliche Kräfte, sodann ungemeinschaftliche und endlich wieder gemeinschaftliche auf einander folgen.

Wie dem aber auch sei, jedenfalls kann man bei Construktion der Kräftepolygone die Anfangspunkte der beiden ersten ungemeinschaftlichen Kräfte zusammenfallen lassen, wie dies z. B. in Fig. 23, Taf. III für die Kräftepolygone 0 h k l 1 2 3 .... und 0 m n 1' 2' 3' ..... geschehen ist, welche zwei Kräftesystemen angehören, die aus den ungemeinschaftlichen Kräften P_h, P_k, P_l einerseits, P_m, P_n andererseits und aus den gemeinschaftlichen P_1, P_2, P_3.... bestehen, und bei deren Construktion mit den ungemeinschaftlichen Kräften begonnen werden musste. Nimmt man nun in beiden Kräftepolygonen denselben Punkt C als Pol und beginnt beide Seilpolygone mit einer und derselben zu 0 C parallelen Seite, so hängen, wie bereits die Kräftepolygone im Punkte 0, die Seilpolygone mit jener Linie zusammen, und es können offenbar die so vereinigten Kräfte- und Seilpolygone als diejenigen eines einzigen Systemes von Kräften betrachtet werden, das aus allen unverändert gelassenen Kräften des einen von beiden gegebenen Systemen, welches dies auch sein mag, und aus denen des anderen besteht, diese aber zwar von gleicher Grösse, Richtung und Lage, jedoch im entgegengesetzten Sinne genommen. So gehört das Kräftepolygon.... 3 2 1 l k h 0 m n 1' 2' 3'.... dem Kräftesystem $-P_3$, $-P_2$, $-P_1$, $-P_l$, $-P_k$, $-P_h$, P_m, P_n, P_1, P_2, P_3.... (kürzer -3, -2, -1, $-l$, $-k$, $-h$, m, n, 1, 2, 3, ...) an, wo die Zeichen — vor den Kräften andeuten sollen, dass dieselben im entgegengesetzten Sinne gedacht werden, ohne dass ihre Grösse, Richtung und Lage sich änderte. Das zugehörige Seilpolygon zu zeichnen haben wir für gegenwärtige Auseinandersetzungen nicht für nothwendig gehalten. Im obengenannten Kräftepolygon stellen die parallelen und gleichlangen Linien l n, 1 1', 2 2', 3 3' etc. der Grösse, Richtung und dem Sinne nach die Resultanten der Kräftesysteme $-l$, $-k$, $-h$, m, n, bezw. -1, $-l$, $-k$, $-h$, m, n, 1 oder -2, -1, $-l$, $-k$, $-h$, m, n, 1, 2 etc. dar. Diese Resultanten stimmen aber nicht blos der Grösse, Richtung und dem Sinne, sondern auch der Lage nach vollständig mit einander überein, da die Kräfte -1 und 1, -2 und 2 etc. sich aufheben. Die Seilpolygonseiten also, welche bezw. zu den Strahlen 1 C und n C, dann 1 C und 1' C, ferner 2 C und 2' C etc. etc. parallel sind, also die gleichvielten Seiten derjenigen Seilpolygonstücke, welche den gemeinschaftlichen Kräften angehören, schneiden sich alle auf einer und derselben geraden Linie, auf der Resultante der ungemeinschaftlichen Kräfte $-l$, $-k$, $-h$, m, n, voraus-

gesetzt, dass bei der Bildung dieser Resultante die ungemeinschaftlichen Kräfte in einem Systeme, gleichviel in welchem, im entgegengesetzten Sinne genommen werden.

Dieser Satz hat viel Aehnlichkeit mit dem in §. 29 erhaltenen Ergebniss, und in der That ist der Zusammenhang zwischen beiden leicht aufzudecken. Es hat offenbar auf das Seilpolygon eines Kräftesystems nicht den mindesten Einfluss, wenn man das Kräftepolygon zugleich mit dem Pol parallel mit sich selbst, d. h. so verschiebt, dass sich seine Eckpunkte und der Pol in parallelen Linien fortbewegen. Verschiebt man in solcher Weise das Kräftepolygon 0 m n 1' 2' 3' .... längs den Linien n 1, 1' 1, 2' 2, 3' 3 ...., so kann man das den gemeinschaftlichen Kräften angehörige Stück n 1' 2' 3' ..... auf das entsprechende 1 1 2 3 .... des anderen Polygons legen. Das den ungemeinschaftlichen Kräften angehörige Stück n m 0 kommt nach 1 m' 0' zu liegen und der Pol C nach C'. Nun kann man das zweite Seilpolygon als zu dem Kräftepolygon 0' m' 1 1 2 3 .... mit dem Pol C' gehörig betrachten, und die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Seilpolygonstücke müssen daher in derselben Beziehung zu einander stehen wie zwei Seilpolygone überhaupt, welche aus demselben Kräftepolygon, aber unter Annahme verschiedener Pole construirt werden.

Hätte man die beiden Kräftepolygone von vornherein so gezeichnet, dass die den gemeinschaftlichen Kräften entsprechenden Stücke auf einander fallen, also so wie die beiden 0 h k 1 1 2 3 und 0' m' 1 1 2 3 ...., so würden unter der Annahme des nämlichen Poles C für beide die den gemeinschaftlichen Kräften angehörigen Seilpolygonstücke so geworden sein, dass die gleichvielten Seiten derselben zu einander parallel gelaufen wären oder sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene geschnitten hätten. Würde man aber für beide Kräftesysteme zwei verschiedene, in beliebiger Lage gegen einander befindliche Pole C und C'' nehmen, so würden sich die gleichvielten Seiten obengenannter Seilpolygonstücke auf einer geraden Linie schneiden, die parallel zur Verbindungslinie C C'' der Pole wäre. Diese gerade Linie wird mit der Resultante aus den ungemeinschaftlichen Kräften, die des einen der beiden Systeme im entgegengesetzten Sinne genommen, der Richtung und Lage nach zusammenfallen, wenn die Verbindungslinie C C' der Pole gleich, parallel und in demselben Sinne gerichtet ist wie die Verbindungslinie der Anfangspunkte 0 0', welche jene Resultante der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellt, und wenn die ersten Seiten in beiden Seilpolygonen, die zu den parallelen Strahlen 0 C und 0' C' parallel sind, in e i n e zusammengelegt werden.

Der letzte Fall findet allemal statt, wenn die Anfangspunkte 0 und 0' selbst als Pole genommen, wenn also die Mittelkraftslinien construirt werden. Denn die Verbindungslinie der Pole fällt dann mit jener der Anfangspunkte selbst zusammen, und die ersten Seiten der Seilpolygone, welche der Lage und Richtung nach beliebig angenommen werden dürfen, können immer als aufeinander fallend gedacht werden.

Wir haben bereits angedeutet, dass die vorstehenden Entwicklungen auch Anwendung finden auf den Fall, wo ein zweites Kräftesystem 1 2 3' 4' 5 6 7 .... sich von einem ursprünglich gegebenen ersten 1 2 3 4 5 6 7 ... nur dadurch unterscheidet, dass einige Kräfte 3, 4 in diesem ihrer Grösse, Lage und Richtung nach in die 3', 4' abgeändert werden. Die Kräfte- und Seilpolygone der vorausgehenden gemeinschaftlichen Kräfte kann man zusammenfallen lassen; die Kräftepolygonstücke aus den, den ungemeinschaftlichen nachfolgenden gemeinschaftlichen Kräften 5, 6, 7 .... erscheinen dann gegen einander parallel um ein Stück verschoben, das der Grösse und Richtung nach mit der Resultante aus den Kräften 3, 4, — 3', — 4' oder auch — 3, — 4, 3', 4'

übereinstimmt, und die gleichvielten Seiten der Seilpolygonstücke, welche den letzteren gemeinschaftlichen Kräften zugehören, schneiden sich auf der geraden Linie, in welcher jene Resultante liegt.

Auch der zu Ende des vorigen §. besprochene Fall gehört hieher. Die beiden Kräftesysteme 1, 2, 3, 4, 5 ... und 3, 4, 5 .... haben in der That die Kräfte 3, 4, 5 ... gemeinschaftlich, während die blos im ersten System vorkommenden 1, 2 als ungemeinschaftlich zu betrachten sind. Die gleichvielten Seiten der aus beiden Systemen construirten Mittelkraftslinien schneiden sich daher auf der geraden Linie II III (Fig. 22), in welcher die Resultante der Kräfte 1, 2 oder — 1, — 2 liegt.

§. 32. **Beispiel: Mitteldruckslinien eines Gewölbes für verschiedene Horizontalschübe im Scheitel desselben.** — Seine vorzüglichste Anwendung findet das im vorigen §. gefundene Resultat da, wo das Kräfte- und Seilpolygon eines Systemes von Kräften bekannt sind und diejenigen für ein anderes System, das mit jenem eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich hat, construirt werden sollen. In Fig. 24, Taf. III wurde als Beispiel der Fall behandelt, wo die acht Kräfte P_1, P_2, P_3 .... P_8, welche in den, mit denselben Buchstaben versehenen Vertikallinien wirken, und deren Grösse in Fig. 24$_a$) mit h 1, 1 2, 2 3 .... gegeben sind, zuerst mit einer neunten horizontalen Kraft P_h von der Grösse 0 h (Fig. 24$_a$)) vereinigt wurden. Diese Zusammensetzung sei vermittelst des Kräftepolygons 0 h 1 2 .... 8 und des unter Zugrundelegung des Anfangspunktes 0 als Pol construirten Seilpolygons, hier eigentlich der Mittelkraftslinie I II III .... VIII IX vorgenommen worden. Man sieht, diese Mittelkraftslinie stimmt überein mit der Mitteldruckslinie eines Gewölbes, bei welchem P_1, P_2 .... P_8 die Gewichte der Lamellen sind, in welche es durch verticale Schnittebenen zerlegt wird, und für welches P_h der Horizontalschub im Scheitel ist. Die Aufgabe ist, diejenige Mitteldruckslinie zu construiren, welche, unter Beibehaltung der Gewichte P_1, P_2 ..... P_8 einem anderen, der Grösse und Lage nach von jenem verschiedenen Horizontalschub $P_{h'}$ entspricht.

Behält man das aus den Kräften P_1, P_2 ..... P_8 construirte Kräftepolygon h 1 2 3 ... 8 bei, so darf man nur den neuen Horizontalschub $P_{h'}$ rückwärts von h als h 0′ auftragen, um in 0′ h 1 2 3 .... 8 das Kräftepolygon des neuen Systems zu erhalten. Zur Construktion der neuen Mittelkraftslinie muss 0′ als Pol genommen werden, und es gilt für diese also betreffs ihrer Beziehung zur alten der Satz, dass die gleichvielten, den gemeinschaftlichen Kräften zugehörigen Seiten sich in den nämlichen Punkten der Geraden schneiden, in welcher die Resultante der ungemeinschaftlichen Kräfte, die des einen Systems entgegengesetzt genommen, also hier die Resultante der Kräfte P_h und — $P_{h'}$ oder — P_h und $P_{h'}$ liegt. Diese Gerade ist also horizontal wie die Kräfte P_h und $P_{h'}$ oder parallel zur Verbindungslinie 0 0′ der Pole. Um einen Punkt von ihr zu erhalten, kann man die zu vereinigenden Kräfte P_h und — $P_{h'}$ von einem beliebigen Punkt 0 aus in ein Kräftepolygon 0 h 0′ zusammentragen, einen beliebigen Punkt C als Pol nehmen und daraus das Seilpolygon B I I′ B construiren, dessen äusserste Seiten sich in dem gesuchten Punkte B schneiden. Auf der durch ihn gelegten Horizontallinie M N müssen sich die gleichvielten Seiten der beiden Mitteldruckslinien treffen. Verlängert man also die erste Seite I II der ersten Mitteldruckslinie bis zu ihrem Durchschnitt a mit M N, so geht durch diesen Punkt und den Punkt I′, wo der Horizontalschub $P_{h'}$ die erste Vertikalkraft P_1 schneidet, die Seite I′ II′ der neuen Mitteldruckslinie. In unserer Fig. 24 konnte der Schnittpunkt a nicht mehr erhalten werden. In einem solchen Falle muss eben die Seite I′ II′ direkt gezeichnet, d. h. parallel zum Strahl 1 0′ im Kräftepolygon gezogen werden. Die Seite II′ III′ geht dann durch

den Durchschnittspunkt b der gleichvielten Seite II III der ursprünglichen Mitteldruckslinie mit der Linie MN und durch den Punkt II' hindurch, in welchem die vorhergehende Seite I' II' die Kraft P_2 getroffen hat, u. s. w. f. für alle folgenden Seiten. In einem Falle, wo die beiden Punkte, deren Verbindungslinie die neue Seilpolygonseite ergibt, zu nahe beisammen liegen, wie dies z. B. in unserer Figur bei der Seite VI' VII' stattfindet, muss diese Seite eben auch direkt, d. h. parallel zum entsprechenden Strahl 6 0' im Kräftepolygon gezogen werden.

§. 33. **Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr in einer Ebene liegen.** — Die Aufgabe, eine gegebene Kraft in zwei oder mehrere Componenten zu zerlegen, welche mit ihr in einer Ebene liegen und beliebige Angriffspunkte haben, ist, in dieser Allgemeinheit gestellt, völlig unbestimmt. Ist es ja doch schon die, eine Kraft in zwei mit ihr in einer Ebene gelegene Componenten zu zerlegen, die an demselben Punkte wie sie angreifen (§. 14). Es können also willkürliche Bestimmungen über die zu erhaltenden Componenten getroffen werden. In den Anwendungen sind meistens Richtung und Lage dieser Componenten, d. h. der geraden Linien gegeben, in denen sie wirken. Aber damit kann unter Umständen schon zu viel gethan sein, sodass die Lösung der Aufgabe unmöglich wird. Es ist daher nothwendig, dass wir etwas tiefer auf dieselbe eingehen, wobei wir immer voraussetzen werden, dass Richtung und Lage der Componenten von vornherein gegeben sind.

1) Soll eine gegebene Kraft in zwei mit ihr in einer Ebene gelegene Componenten zerlegt werden, so müssen sich dieselben, d. h. die geraden Linien, in denen sie liegen, in dem nämlichen Punkt der gegebenen Resultante schneiden, oder sie müssen beide zu derselben parallel sein, wenn die Zerlegung überhaupt möglich sein soll. Denn umgekehrt geht ja die Resultante zweier sich schneidender Kräfte stets durch deren Schnittpunkt hindurch; liegt derselbe also nicht in der gegebenen Kraft, so kann die Resultante niemals mit ihr zusammenfallen. Ebenso ist die Resultante paralleler Kräfte parallel mit ihnen und kann daher nur dann mit der gegebenen Resultante identisch werden, wenn jene parallel zu dieser sind.

Wenn die gesuchten Componenten, deren Richtungen vorgeschrieben sind, sich in einem Punkt der Resultante schneiden, so darf man diese nur mit ihrem Angriffspunkt in diesen Schnittpunkt verlegen und dortselbst nach den gegebenen Richtungen mittelst des Kräfteparallelogramms oder Kräftepolygons in der Art zerlegen, wie es schon im §. 14 gelehrt wurde. Die Aufgabe ist vollständig bestimmt. Das Kräftepolygon kann auch seitwärts gezeichnet werden, indem man (Fig. 25a), Taf. IV) von einem beliebigen Punkt 0 aus die gegebene Resultante $P_{1,2}$ der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als 0 2 aufträgt und durch ihre Endpunkte Parallele zu den gegebenen Richtungen P_1, P_2 der Componenten zieht. Die Strecken dieser Parallelen zwischen ihrem Schnittpunkte 1 und jenen Endpunkten 0, 2 der Resultante stellen alsdann, in dem Sinne genommen, dass man auf ihnen vom Anfangspunkte 0 der Resultante zu ihrem Endpunkte 2 gelangt, die Grösse, Richtung und den Sinn der gesuchten Componenten vor. Sie in die gegebenen geraden Linien, in denen sie wirken, wirklich einzutragen, ist meist nicht nothwendig. Ebensowenig ist es in der Regel erforderlich, das Seilpolygon zu zeichnen, das zu jenem Kräftepolygon gehört. Wollte man es doch thun, so müsste eben im Kräftepolygon ein beliebiger Punkt C als Pol angenommen und die erste Seite 0 I des Seilpolygons parallel zum ersten Strahl, sonst aber beliebig gezeichnet werden. Die beiden anderen Seiten I II und II III ergeben sich auf die bekannte Weise. Die erste und letzte müssen sich in einem Punkte a auf der Resultante schneiden. Die Mittelkraftslinie, das Seilpolygon für den Anfangspunkt 0 als Pol, wird I' II' III' und hat eine einzige Ecke, II' oder a, den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der beiden

Componenten und der Resultante, wenn die erste, ganz beliebige Seite wie gewöhnlich nicht mitgezählt wird.

Wenn die Linien P_1 und P_2 (Fig. 26 und Fig. 27, Taf. IV), in denen die gesuchten Componenten liegen sollen, parallel zu der zu zerlegenden Kraft P_{12} sind, so führt die Construktion des Kräftepolygons (Fig. 26_a) und 27_a) allein nicht zum Ziel; denn die beiden Parallelen zu jenen Linien, welche durch die Endpunkte der an einer beliebigen Stelle abgetragenen Resultante 0 2 gezogen werden, fallen mit dieser Resultante zusammen; ihr Durchschnittspunkt wird folglich unbestimmt. Man muss hier einen beliebigen Punkt ausserhalb der Resultante als Pol annehmen und das Seilpolygon in folgender Weise construiren. Die erste Seite 0 I ist parallel zum ersten Strahl 0 C und ausserdem, ihrer Lage nach, beliebig. Ihr Durchschnitt I mit der Linie, in der die erste Componente P_1 liegen soll, gibt den ersten Eckpunkt. Durch ihren Durchschnittspunkt a mit der Resultante P_{12} geht auch die dritte Seite des Seilpolygons. Diese kann also parallel zum dritten Strahl 2 C gezeichnet werden und gibt in ihrem Durchschnitt mit der Linie P_2 den zweiten Eckpunkt des Seilpolygons. Damit ist nun auch die zweite Seite I II desselben bestimmt und folglich auch der zweite Strahl 1 C, der, zu ihr parallel, durch den Pol C geht und die Resultante 0 2 in seinem Durchschnittspunkt 1 mit ihr in die gesuchten zwei Componenten 0 1 und 1 2 theilt. Der Sinn derselben ist wieder so aufzufassen, dass man auf ihnen vom Anfangspunkt 0 der Resultante über den Punkt 1 nach deren Endpunkt 2 gelangen kann. Je nachdem also der Theilungspunkt 1 zwischen den Endpunkten der Resultante oder ausserhalb derselben liegt, sind die Componenten in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gerichtet. Das erstere findet immer statt, wenn die Linien P_1 und P_2, in welche die Componenten zu liegen kommen sollen, auf beiden Seiten der Resultante P_{12} liegen (Fig. 26), das andere, wenn sie sich beide auf der nämlichen Seite befinden (Fig. 27).

2) Bei der Zerlegung einer gegebenen Kraft in drei Componenten, die mit ihr in einer Ebene gelegen sind, und deren Richtung und Lage gegeben ist, können folgende Unterfälle vorkommen:

a) Zwei von den drei Componenten schneiden sich in ein und demselben Punkt der zu zerlegenden Resultante, durch den die dritte aber nicht hindurchgeht, oder, was dem ganz ähnlich ist, zwei der Componenten sind parallel zur Resultante, die dritte aber nicht. Dass die Auflösung in diesem Falle unmöglich ist, lässt sich leicht zeigen. Denn gäbe es drei solche Componenten, so würden die beiden ersten miteinander vereinigt eine Mittelkraft ergeben, die entweder durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt mit der gegebenen Resultante hindurchgehen oder zu ihnen und dieser parallel sein würde. Diese Mittelkraft, mit der dritten Componente von obiger Beschaffenheit vereinigt, würde dann eine Resultante geben, welche gewiss nicht auch durch jenen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt hindurchgehen oder gewiss nicht auch dieselbe Richtung wie die gegebene Resultante haben würde. Sie könnte also niemals mit dieser identisch werden.

b) Die drei Componenten schneiden sich in ein und dem nämlichen Punkt oder sind parallel zu einander. Wenn dabei jener gemeinschaftliche Durchschnittspunkt nicht in der gegebenen Resultante liegt, oder wenn die drei Componenten nicht zugleich parallel zu dieser sind, dann ist die Lösung, wie schon aus dem ersten Fall ersichtlich, nicht möglich. Liegt aber der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Linien, in welche die Componenten fallen sollen, auf der zu zerlegenden Kraft, oder sind alle drei parallel zu dieser, so wird die Aufgabe möglich, aber unbestimmt. Denn in ersterem Falle geht das Kräftepolygon in ein Viereck über, von dem eine Seite der Grösse und Richtung nach, die drei anderen aber nur der Richtung nach bestimmt

sind, das also noch Willkürlichkeiten zulässt. Im zweiten Falle, in welchem man wieder das Seilpolygon zeichnen muss, ist zwar die erste und vierte Seite desselben, welche sich in einem Punkte der gegebenen Resultante schneiden, bestimmt, nicht aber die zwischenliegenden zweite und dritte Seite, also auch nicht die zu diesen parallelen Strahlen im Kräftepolygon.

c) Die drei geraden Linien, in denen die drei Componenten liegen sollen, schneiden sich in drei verschiedenen Punkten, von denen keiner auf der gegebenen Resultante liegt, oder, was dem ganz ähnlich ist, zwei der Componenten sind parallel, aber nicht zugleich auch zur Resultante, und werden von der dritten geschnitten. In diesem Falle ist die Auflösung der Aufgabe möglich und bestimmt, d. h. es gibt nur eine einzige Lösung. Dies ist leicht zu erweisen. Man verbinde den Punkt III (Fig. 28b), Tafel IV), in welchem die Resultante P_{1-3} eine von den Componenten, gleichviel welche, etwa die P_3 schneidet, mit dem Durchschnittspunkt II der beiden anderen P_1, P_2. (In dem Falle, wo diese beiden anderen parallel zu einander sind, hat man durch jenen ersten Punkt eine Parallele zu ihnen zu ziehen). Dann kann die Resultante an ihrem Schnittpunkt mit jener ersten Componente in ganz bestimmter Weise in zwei Componenten zerlegt werden, welche bezw. in den Linien P_3 und II III liegen, und von denen letztere wieder in ganz bestimmter Art in zwei, in den Linien P_1, P_2 liegende Componenten zerfällt, gleichviel, ob diese sich in dem Punkte II schneiden oder parallel zur Linie II III sind. Die drei, in P_3, P_2, P_1 liegenden Componenten können also gefunden werden, und zwar erhält man immer die nämlichen, in welcher Reihenfolge man auch jene Zerlegungen vornehmen, d. h. von welchem der möglicher Weise vorhandenen drei Durchschnittspunkte der Resultante mit den drei Componenten man dabei ausgehen mag. Denn gäbe es in P_1 und P_2 noch zwei andere von jenen verschiedene Componenten, so würde deren Resultante wenn nicht in Grösse und Richtung, doch gewiss in Grösse oder in Richtung von der in der Linie II III liegenden Kraft, die wir vorhin zerlegt haben, verschieden sein. In keinem Falle könnte sie aber, mit der dritten Componente P_3 vereinigt, die gegebene Resultante P_{1-3} geben.

Bei der wirklichen Ausführung der Aufgabe nimmt man jene Zerlegungen wieder besser mittelst des Kräftepolygons, statt des Parallelogrammes der Kräfte vor. Man trägt zu diesem Behufe die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach seitwärts als 0 3 (Fig. 28a)) ab. Für die erste Zerlegung hat man dann nur durch die Endpunkte 3 und 0 derselben Parallele 3 2 und 0 2 bezw. zu den Linien P_3 und II III zu ziehen, so sind 0 2 und 2 3, in diesem Sinne genommen, die Componenten. Die erstere, 0 2, zerlegt man dann, vorausgesetzt, dass die Linien P_1 und P_2 nicht parallel sind, sehr einfach wieder dadurch, dass man durch ihre Endpunkte 0 und 2 Parallele 0 1 und 1 2 zu diesen Linien zieht, welche sich in dem Punkte 1 schneiden. 0 1 und 1 2 sind dann, zusammen mit 2 3, die gesuchten Componenten. Für den Fall, wo P_1 und P_2 parallel sind, wäre die letzte Zerlegung nicht mehr so einfach auszuführen, aber immerhin noch möglich. Man wird daher gut thun, in diesem Falle die Zerlegung der Resultante P_{1-3} an demjenigen Punkte zu beginnen, wo sie die eine von den zwei vorhandenen Parallelen schneidet.

Im Grunde hat man bei obiger Construktion nichts anderes gethan, als zuerst die Mittelkraftslinie IV III II I und aus ihr das Kräftepolygon 0 1 2 3 mit dem Pol im Anfangspunkt 0 gezeichnet. Die Mittelkraftslinie ist hier in der Regel dem allgemeineren Seilpolygon vorzuziehen, weil die Construktion sehr einfach wird. Es steht aber nichts im Wege, die Zerlegung auf etwas allgemeineren, mehr Spielraum lassendem Wege mit Hülfe des Seilpolygons für einen ganz beliebigen Pol im Kräftepolygon vorzunehmen, wenn dies aus irgend welchen Gründen wünschenswerth sein

sollte. In Fig. 29_a) und 29_b) auf Taf. IV ist es für dieselbe Resultante P_{1-3} und für die nämlichen drei Linien P_1, P_2, P_3, in welchen die drei Componenten liegen sollen, geschehen. Nachdem seitwärts die Resultante P_{1-3} ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach als 0 3 abgetragen war, wurde ein beliebiger Punkt C als Pol des zu zeichnenden Kräftepolygons angenommen. Dadurch waren alsdann der erste und letzte Strahl, 0 C und 3 C, in diesem bestimmt, und da sich die zu ihnen parallelen ersten und letzten Seilpolygonseiten in einem Punkte der Resultante P_{1-3} schneiden müssen, so konnte man jene zeichnen, indem man durch einen beliebigen Punkt α der letzteren Linie 0 I und III IV bezw. parallel zu den Strahlen 0 C und 3 C zog. Offenbar kann hiebei der Pol C immer so gewählt werden, dass die beiden, eben gezeichneten Seilpolygonseiten zwei von den drei gegebenen Linien, P_1 und P_3, schneiden. Die Schnittpunkte sind natürlich nichts anderes als die Eckpunkte I und III des Seilpolygons. Es fehlt also noch der Eckpunkt II, welcher, auf P_2 liegend, folgende Bedingungen erfüllen muss: zieht man durch die Punkte 0 und 3 des Kräftepolygons Linien, parallel zu denen P_1 und P_3, so haben diese die Richtungen der ersten und dritten Seite im Kräftepolygon. Wenn folglich durch C die Strahlen C 1 und C 2 parallel mit den zu suchenden Seiten I II und II III des Seilpolygons gelegt und bis zu ihren Durchschnittspunkten 1 und 2 mit jenen Seiten verlängert werden, so muss die Verbindungslinie 1 2 dieser Schnittpunkte parallel zur Linie P_2 werden, auf welcher der Punkt II liegt. Dieser ist folglich leicht in folgender Weise zu erhalten. Denkt man sich die Kraft P_2 in zwei Componenten $P_{2'}$ und $P_{2''}$ zerlegt, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch die Strecken 1 a und a 2 dargestellt ist, so kann man die eine derselben, $P_{2'}$, in die Linie P_1 fallen lassen; die andere, $P_{2''}$, muss aber dann in der Geraden $\beta\gamma$ liegen, welche durch den Durchschnittspunkt β von P_1 und P_2 parallel zu P_3 gezogen ist. Das Seilpolygon aus den vier Kräften P_1, $P_{2'}$, $P_{2''}$, P_3 gestaltet sich folglich so: die erste Seite bleibt die schon gezeichnete 0 I; die zweite Seite, zwischen P_1 und $P_{2'}$, wird Null, weil diese Kräfte in derselben geraden Linie liegen; die dritte Seite, zwischen $P_{2'}$ und $P_{2''}$, wird parallel zum Strahl a C und geht durch den Punkt I; sie kann also gezogen werden, in der Figur ist sie mit I γ bezeichnet. Die auf $P_{2''}$ folgende Seilpolygonseite ist aber nun dadurch auch bestimmt. Denn da die Gesammtresultante und folglich auch die letzte Seite III IV unverändert bleiben muss, so ist die Verbindungslinie des Punktes γ mit dem III jene Polygonseite. Werden nun wieder die Componenten $P_{2'}$ und $P_{2''}$ zur Kraft P_2 vereinigt, so müssen sich die beiden Polygonseiten, von denen die eine der Componente $P_{2'}$ vorausgeht, die andere der $P_{2''}$ nachfolgt, auf P_2 schneiden. Letztere, die Seite γ III, gibt folglich, wo nöthig verlängert, bis sie P_2 schneidet, den gesuchten Punkt II, und wenn man dann die Strahlen C 1 und C 2 im Kräftepolygon parallel zu den Verbindungslinien I II und II III zieht, so schneiden sie auf 0 a und a 3 die Componenten 0 1 und 2 3 ab, während die Verbindungslinie 1 2 der Schnittpunkte die Componente P_2 gibt.

Von der Richtigkeit dieser Construktion kann man sich auch auf rein geometrischem Wege leicht überzeugen. Denn eigentlich haben wir in den beiden vollständigen Vierecken C 1 a 2 und I β γ II fünf Paar entsprechender Seiten bezw. parallel gemacht; die sechsten 1 2 und β II mussten es also von selbst werden. Das Polygon 0 1 2 3 gibt daher die Grösse und den Sinn der drei gesuchten Componenten.

Zur Durchführung obiger Construktion ist der Schnittpunkt a der Seiten 0 1 und 3 2 des Kräftepolygons erforderlich. Wären diese beiden Seiten, also die Linien P_1 und P_3, parallel zu einander, wie es sein kann, da zwei von den drei Componenten in parallelen Linien liegen dürfen, so würde auch der Strahl C a parallel zu ihnen. Die durch den Durchschnittspunkt β von

P_1 mit P_2 und durch den Punkt I bezw. parallel zu P_3 und zu jenem Strahl gezogenen Linien würden sich also nicht schneiden, sondern zusammenfallen, und der Punkt γ würde dadurch unbestimmt, werden. Man müsste folglich einen anderen Weg zur Aufsuchung des Punktes II einschlagen, und es ist nicht schwer, einen solchen zu finden. Aber man wird immer besser thun einen derartigen Ausnahmsfall wo möglich zu vermeiden; und dies kann man hier in der That. Man darf nur die Reihenfolge der Componenten so nehmen, dass die erste und dritte sich schneiden, darf also den Pol C nur so wählen, dass die Seilpolygonseiten 0 I und III IV, welche durch den beliebigen Punkt α der Resultante parallel zu den Strahlen 0 C und 3 C gezogen werden, zwei nicht zu einander parallele von den gegebenen drei Linien, in welche die Componenten fallen sollen, in den Punkten I und III schneiden (s. Fig. 30a) und 30b), Taf. IV). Es fällt dann zwar der Schnittpunkt β der beiden Linien P_1 und P_2 in unendliche Entfernung und daher auch die zu P_3 parallele Linie $\beta\gamma$ und ihr Schnittpunkt γ mit der durch I zum Strahl a C parallel gezogenen Geraden; daraus folgt aber nur, dass die Verbindungslinie γ III auch parallel zur Linie I γ oder zum Strahl a C ist. Man hat also einfach durch den Punkt III eine Parallele zum Strahl a C im Kräftepolygon zu ziehen, um in ihrem Durchschnittspunkt mit der Linie P_2 den Eckpunkt II des Seilpolygons zu erhalten.

Da die Resultante der parallelen Kräfte P_1 und P_2 parallel zu ihnen, durch den Schnittpunkt δ ihrer äusseren Seilpolygonseiten 0 I und II III gehen muss, aber auch durch den Punkt ε, in welchem die gegebene Resultante die Componente P_3 schneidet; so kann man die Seite II III und mit ihr den Punkt II noch einfacher erhalten. Man darf nur den Punkt δ, in welchem die durch ε parallel zu P_1 und P_2 gezogene Gerade die Polygonseite 0 I schneidet, mit dem Eckpunkt III verbinden. In der That wurden in den beiden vollständigen Vierecken a 3 C 0 und ε III α δ fünf Paar entsprechender Seiten bezw. parallel zu einander gezogen, weshalb es auch die sechsten werden müssen.

Existirt freilich der Schnittpunkt ε nicht mehr, ist also P_3 parallel mit der gegebenen Resultante, was vorkommen kann (Fig. 31, Taf. IV), so bleibt nichts übrig, als wie vorhin im Allgemeinen die Seite III II parallel mit dem Strahl a C im Kräftepolygon zu ziehen, der hier eben mit dem 0 C zusammenfällt, weil die Seite 3 2 in die 3 0 zu liegen kommt. Im übrigen ist die Auflösung in diesem speziellen Fall, wo also zwei der Componenten P_1 und P_2 unter sich parallel sind und die dritte mit der gegebenen Resultante, ganz so durchzuführen wie oben. Fig. 31 zeigt, dass die beiden Componenten, welche in die zu einander parallelen Geraden P_1 und P_2 fallen, nämlich 0 1 und 1 2, von gleicher Grösse sind, aber im entgegengesetzten Sinn wirken, also ein Gegenpaar bilden, und dass die dritte Componente 2 3 an Grösse, Richtung und Sinn mit der Resultante übereinstimmt. Dies folgt schon unmittelbar aus den Betrachtungen im §. 26.

3) Die Aufgabe, eine gegebene Kraft in vier oder mehr Componenten, die alle mit ihr in einer Ebene gelegen sind, zu zerlegen ist, wenn nicht unmöglich, jedenfalls unbestimmt.

§. 34. Beispiel: Graphische Bestimmung der Spannungen in den Construktionstheilen eines eisernen Dachstuhls (Fachwerkträgers). — Als Beispiel für die im gegenwärtigen Abschnitt gelehrte Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene haben wir in Fig. 32, Taf. V einen Querträger A B g eines eisernen Dachstuhls gewählt, der mit seinen, in horizontaler Linie liegenden Enden A, B frei auf Stützen liegt. Er ist in Fig. 32b) nur zur Hälfte gezeichnet, da er um die Mittellinie g h symmetrisch angeordnet sein soll. Der Träger ist als Fachwerk construirt, d. h. er kann aus einzelnen geradlinigen Constructionstheilen A a, A b, a b etc. bestehend gedacht werden, die mit ihren Endpunkten so aneinander befestigt sind, dass nur ein-

fache (ihrer Länge nach wirkende) Zug- oder Druckspannungen in ihnen hervorgerufen werden können, dass sie also nicht auf Biegung beansprucht werden. Die von aussen auf den Träger wirkenden Kräfte, sein eigenes Gewicht, das der Bedachung, den Schneedruck etc., denken wir uns auf die oberen Knotenpunkte A, a, c, e, g..... vertheilt, wo sie die Grössen P_1, P_2, P_3... haben mögen. Dann stellen wir uns die Aufgaben:

1) Jene parallelen, vertikal abwärts gerichteten Kräfte in eine Resultante zu vereinigen.

2) Diese Resultante in zwei Componenten zu zerlegen, welche in den durch die Auflagerpunkte A, B gezogenen Vertikalen liegen und daher die Auflagerdrücke repräsentiren.

3) Die in den einzelnen Construktionstheilen wirkenden Zug- oder Druckspannungen zu finden.

Behufs Auflösung der ersten Aufgabe bilden wir aus den Kräften P_1, P_2.... das Kräftepolygon 0 1 2 3... in Fig. 32_a). Den Pol C desselben nehmen wir, unter Voraussetzung, dass die Kräfte P auch ihrer Grösse nach symmetrisch um die Mittellinie g h vertheilt sind, in der Senkrechten 𝔄C an, welche in der Mitte der mittleren Kraft P_5 oder 4 5 auf dem Kräftezug 0 9 errichtet ist. Dann ordnet sich auch das Seilpolygon 0 I II.... symmetrisch um die Mittellinie gh an. Die erste Seite 0 I desselben, welche parallel zum Strahl 0C ist, lassen wir gleich durch den Stützpunkt A gehen; dann gehen auch seine vorletzte und letzte Seite VIII IX und IX X durch den Stützpunkt B. Sie sind in Fig. 32 nicht mehr gezeichnet, aber der Symmetrie wegen leicht in Gedanken zu ergänzen. Man darf sich nur den rechtsseitigen Theil des Trägers um g h auf den linken herübergeschlagen denken.

Die Grösse, Richtung und den Sinn der Resultante der Kräfte P_1, P_2... P_9 gibt die Strecke 0 9 im Kräftepolygon, das ebenfalls in Gedanken leicht ergänzt werden kann. Ihre Lage ist dadurch bestimmt, dass sie durch den Duchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und IX X hindurch gehen muss. Dieser liegt natürlich in der Mittellinie g h, in welche also auch die Resultante fällt.

Um die Resultante P_{1-9} in zwei zu ihr parallele Componenten zu zerlegen, welche in den durch die Stützpunkte A, B gezogenen Vertikallinien liegen, nehmen wir im Kräftepolygon den schon vorhandenen Pol C und ziehen durch den Punkt der Resultante, in welchem sich die äussersten Seilpolygonseiten schneiden, Parallellinien zu den äussersten Strahlen 0C und 9C. Diese Parallelen sind jene äussersten Seilpolygonseiten selbst und schneiden desshalb die durch A und B gezogenen Vertikalen in den eben bezeichneten Punkten. Die Verbindungslinie A B derselben ist horizontal und die zu ihr parallel durch den Pol C gezogene Theilungslinie keine andere, als die vorhin senkrecht auf dem Kräftezug errichtete 𝔄C. 0𝔄 und 𝔄9 stellen also die Auflagerdrücke A_0 und B_0 vor. Die ihnen gleichen aber im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte 𝔄0 und 9𝔄 repräsentiren folglich die Gegenwirkungen, welche der Träger in den Unterstützungspunkten A und B von Seite dieser erfährt, die sog. Auflagerreaktionen P_0 und bezw. P_0'.

Denkt man sich diese Auflagerreaktionen an dem Träger angebracht, so befindet sich derselbe unter ihrem und dem Einflusse der Kräfte P_1, P_2... P_9 im freien Gleichgewicht, wie man sagt. In der That schliesst sich das Kräftepolygon 𝔄 0 1 2 3 ..... 8 9 𝔄 aus ihnen und ebenso das Seilpolygon B A 0 I II.... IX X B. Es ist nun leicht, das Verfahren anzugeben, durch welches man zur Kenntniss der Spannungen in den einzelnen Construktionstheilen gelangen kann. Denn jenes Gleichgewicht der Kräfte P_0, P_0', P_1, P_2... P_9 kann nur durch Vermittlung dieser Spannungen zu Stande kommen. Denken wir uns also den Träger durch einen

irgendwie geführten Schnitt in zwei Theile getrennt, so wirken die an dem einen, abgeschnittenen Theil thätigen äusseren Kräfte nur durch Vermittlung der Spannungen in den durchschnittenen Constructionstheilen auf den anderen übrig bleibenden Theil. Diese Spannungen, als Einwirkungen des abgeschnittenen auf den anderen Theil gedacht, sind folglich den an ersterem wirkenden, äusseren Kräften äquivalent, oder die Componenten der Resultante aus diesen letzteren Kräften. Da die Spannungen aber blos Zug- oder Druckspannungen sein können, da sie also nur in der Längsrichtung der Construktionstheile, denen sie angehören, wirken können, so ist ihre Lage und Richtung vorgeschrieben, und wir stehen also hier in der That an der im vorigen §. behandelten Aufgabe, eine gegebene Resultante in Componenten zu zerlegen, deren Lage und Richtung vorgeschrieben ist. Diese Aufgabe ist eine mögliche und völlig bestimmte dann, wenn blos zwei Construktionstheile durchschnitten sind, deren Durchschnittspunkt auf der Resultante liegt oder wenn drei Construktionstheile von dem Schnitt getroffen werden und keiner der Punkte, in welchen sie sich selbst unter einander schneiden, auf die Resultante fällt. Wenn mehr als drei Construktionstheile durchschnitten sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, vorausgesetzt, dass nicht die Spannungen in einigen derselben schon anderweitig gefunden wurden oder gefunden werden können, und so doch zuletzt nur höchstens drei unbekannte Spannungen übrig bleiben.

In unserem Beispiel kann e i n Schnitt so geführt werden, dass blos zwei Construktionstheile, nämlich die A a und A b, getroffen werden. Ausserdem kann man auch Schnitte machen deren jeder drei, vier und mehr Construktionstheile zugleich trifft. Doch ist sehr leicht zu sehen, dass sämmtliche Construktionstheile unseres Trägers durchschnitten werden können, ohne dass im Ganzen mehr als drei Construktionstheile durch jeden Schnitt getroffen werden. Unsere Aufgabe, die Spannungen in den einzelnen Bestandtheilen des Trägers kennen zu lernen, ist daher eine mögliche und völlig bestimmte. Sie kann sogar so gelöst werden, dass für jeden Schnitt nur z w e i unbekannte Spannungen übrig bleiben, dass also das Kräftepolygon allein zur Aufsuchung derselben ausreicht. Man darf nur die Schnitte in folgender Ordnung führen:

den ersten durch A a und A b,
den zweiten durch A b, a b und a c,
den dritten durch a c, b c und b d u. s. w. f.

Schlagen wir diesen Weg wirklich ein, so ist zunächst die Resultante der Kräfte, welche auf den durch den ersten Schnitt abgetrennten Theil wirken, nämlich die Resultante der Kräfte P_0 und P_1, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch $\mathfrak{A}\,1$ repräsentirt ist, in zwei Componenten zu zerlegen, deren Richtung und Lage durch A a und A b vorgezeichnet wird. Ihre Grösse und ihr Sinn ergibt sich aus dem Kräftepolygon $\mathfrak{A}\,1\,\mathfrak{a}$, dessen Seiten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$ und $1\,\mathfrak{a}$ bezw. parallel zu A a und A b sind, als $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\,1$. In dem Theil A a findet also Druckspannung von der Grösse $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$, in dem Theil A b Zugspannung von der Grösse $\mathfrak{a}\,1$ statt.

Durch den zweiten Schnitt wird ein Stück abgetrennt, auf das die Kräfte P_0, P_1, P_2 wirken; deren Resultante ist der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach durch $\mathfrak{A}\,2$ repräsentirt. Sie soll in drei Componenten zerlegt werden, deren Richtung und Lage durch A b, b a und a c bestimmt sind, und von denen eine, die in A b wirkende, schon bekannt ist. Trägt man also dieselbe von 2 an ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach rückwärts auf, macht also $2\,\mathfrak{c} = 1\,\mathfrak{a}$, und zieht man durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}$ Parallele zu den anderen Componenten a c und a b, die sich in $\mathfrak{a}'$ durchschneiden, so ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{c}\,2$ das Kräftepolygon, dessen Seiten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}\,2$ der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach die Spannungen in den Construktionstheilen a b, a c und A b vorstellen. In a c und a b finden folglich Druckspannungen statt.

Durch den dritten Schnitt wird ein Stück abgetrennt, auf das gleichfalls die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 einwirken, deren Resultante 𝔄2 ist. Von den drei Componenten, in welche sie zerlegt werden soll, ist die in a c wirkende bereits bekannt, gleich 𝔞'𝔠. Zieht man folglich wieder durch 2 und durch 𝔄 Parallele bezw. zu b d und b c, so hat man 𝔞'𝔠 parallel mit sich selbst so weit zu verschieben, bis es als 𝔟𝔠'' zwischen jene Linien zu liegen kommt, und dann ist 𝔄𝔟𝔠''2 das Kräftepolygon, dessen Seiten 𝔄𝔟, 𝔟𝔠'' und 𝔠''2 die Spannungen bezw. in b c, a c und bd der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellen. Die erste ist also Zug-, die zweite wie vorhin Druck-, die dritte wieder Zugspannung.

In solcher Weise kann man die Construktion durch den ganzen, oder, wie es der Symmetrie halber nur nothwendig ist, durch den halben Träger hindurch fortführen und ist dies in der That in Fig. 32a) geschehen.

Aber man sieht, es war zur consequenten Durchführung des Verfahrens erforderlich, dass zuerst ein Schnitt nur durch zwei Constructionstheile möglich war, und dass man die Schnitte alsdann so aufeinanderfolgen liess, dass in jedem folgenden ein Construktionstheil vorkam, der vom vorhergehenden schon getroffen worden war. Die Einhaltung solcher Bedingungen ist nicht immer möglich, und es kann daher die Aufgabe vorkommen, die Spannungen in den drei von einem Schnitt getroffenen Constructionstheilen zu bestimmen, ohne auf einen vorhergegangenen Schnitt zurückgreifen zu können. In diesem Falle hat man, wie aus vorigem §. 33 bekannt, nicht blos das Kräfte-, sondern auch das Seilpolygon zu construiren. Es muss also die Resultante der auf das abgeschnittene Stück wirkenden äusseren Kräfte auch ihrer Lage nach berücksichtigt werden. Diese ist aber für die Resultanten P_{01}, P_{0-2}, P_{0-3} ... der Kräfte P_0 und P_1, dann P_0, P_1, P_2, ferner P_0, P_1, P_2, P_3 u. s. w. bestimmt, durch die Durchschnittspunkte der äussersten Seilpolygonseiten BA und bezw. I II, II III, III IV u. s. w. f., also durch die Punkte A, m, n.....

Um dann z. B. die Spannungen in den drei Constructionstheilen Ab, ab und ac zu finden, hat man die Resultante P_{0-2} der auf das abgeschnittene Stück wirkenden Kräfte P_0, P_1, P_2 in die Componenten zu zerlegen, welche in jenen Construktionstheilen liegen. Zu diesem Behufe zieht man durch den Durchschnittspunkt m der Resultante mit der dritten jener Componenten, Ab, und durch den Durchschnittspunkt a der beiden anderen Componenten die Verbindungslinie ma, die einzige zu zeichnende Seite des Seilpolygons oder eigentlich der Mittelkraftslinie. Hierauf zieht man durch den Anfangspunkt 𝔄 der Resultante, der nun zugleich Pol für jene Mittelkraftslinie ist, die Parallele 𝔄𝔠 zu m a und durch den Endpunkt 2 der Resultante die Parallele 2𝔠 zur dritten Componente in Ab. Dadurch erhält man den Eckpunkt 𝔠 des Kräftepolygons und die Grösse, Richtung und den Sinn der dritten Componente 𝔠2. Zieht man jetzt noch durch die Punkte 𝔄 und 𝔠 des Kräftepolygons Parallele bezw. zu ab und ac, die sich in 𝔞' schneiden, so ist 𝔄𝔞'𝔠2 das ganze Kräftepolygon, und 𝔄𝔞' und 𝔞'𝔠 stellen der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach die beiden noch übrigen Componenten, d. h. die Spannungen in ab und ac vor.

In ähnlicher Weise hat man, um dieselbe Resultante P_{0-2} in die Spannungen der drei Construktionstheile ac, bc, bd zu zerlegen, die Seite mc der Mitteldruckslinie und das Kräftepolygon 𝔄𝔟𝔠''2 mit dem Pol 𝔄 zu zeichnen, in welchem der Strahl 𝔄𝔠'' parallel zu mc ist. Für alle anderen Schnitte, die blos drei Construktionstheile treffen, bleibt das Verfahren ganz dasselbe.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass man bei der Construktion der Figur 32 einen Dachstuhl vor Augen hatte *), dessen Spannweite A B 32 Meter beträgt, und dessen Höhe 6, 4^m ist. Die Querträger, von denen einer in unserer Aufgabe behandelt ist, folgen in Zwischenräumen von 5 zu 5 Meter auf einander, so dass auf einem die Gesammtlast ruht, welche auf $5 \times 32 = 160$ □Meter Horizontalprojektion des Dachstuhls trifft. Nimmt man also für diese 200 Kilogramm pro □Meter, so treffen auf jedes der 8 Felder des Trägers, die alle gleiche Horizontalprojektion von je 4 Meter Länge haben, 4000^k. Diese wurden in jedem Felde zu gleichen Theilen auf die Anfangs- und Endknotenpunkte, welche in den Linien A g und g B liegen, vertheilt, so dass auf die Zwischenpunkte die Kräfte P_2, $P_3 \ldots P_8$ von je 4000^k und auf den Anfangspunkt A und Endpunkt B des Trägers die Kräfte P_1 und P_9 von je 2000^k treffen. Die Längen wurden in Fig. 32 im Verhältniss $0{,}005^m = 1^m$ und die Kräfte im Massstabe : $0{,}0025^m = 1000^k$ aufgetragen.

§. 35. Zerlegung einer Kraft in eine ihr gleiche und parallele und in ein Gegenpaar. — Eine eigenthümliche Zerlegungsart einer Kraft ergibt sich noch aus §. 26 durch Berücksichtigung der besonderen Rolle, welche die Gegenpaare bei der Zusammensetzung der Kräfte spielen. Dort ergab sich, dass eine Kraft P (Fig. 17, Tafel II) durch Vereinigung mit einem Gegenpaare, das mit ihr in einer Ebene liegt, parallel mit sich selbst, nach P″ verschoben wird, wobei das Dreieck A P A″ an Flächeninhalt dem gleich sein muss, durch welches das Gegenpaar bestimmt ist. Die Seite, nach welcher hin P dabei verschoben wird, ist dadurch vorgezeichnet, dass die verschobene Kraft P″ mit einer, der ursprünglichen P gleichen und in derselben Linie entgegengesetzten, P′, ein Gegenpaar bilden muss, dessen Drehrichtung derjenigen des gegebenen gleich ist.

Umgekehrt kann man also nun die Kraft P″ in die ihr gleiche, mit ihr parallele und in demselben Sinn wirkende P und in ein Gegenpaar P″ P′ zerlegen. Dieses letztere ist durch das Dreieck A″ P″ A (gleich A P A″) bestimmt, dessen Grundlinie die zu zerlegende Kraft A″ P″ ist, und dessen Spitze in der parallel verschobenen Kraft oder Componente P liegt. Seine Drehrichtung wird durch den Kreispfeil gegeben, welcher in jenes Dreieck eingezeichnet wird, und dessen Richtung mit derjenigen der zu zerlegenden Kraft P″ übereinstimmt.

Die eben gezeigte Zerlegung einer Kraft läuft also im Grunde darauf hinaus, dass man sie parallell mit sich selbst in irgend welcher Weise verschiebt und zur verschobenen Kraft ein Gegenpaar hinzunimmt, das durch den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt ist, dessen Grundlinie die ursprünglich gegebene Kraft ist, und dessen Spitze in der verschobenen Kraft liegt. Der in dasselbe gezeichnete Kreispfeil, dessen Richtung mit derjenigen der gegebenen Kraft übereinstimmt, gibt die Drehrichtung des Gegenpaars an. In völlig unzweideutiger Weise ist diese Zerlegung einer Kraft dadurch bestimmt, dass man den Punkt angibt, durch welchen die ihr gleiche, mit ihr parallele und in demselben Sinne wirkende Componente hindurchgehen muss. Denn hiedurch ist diese Componente festgelegt, und das zu ihr gehörige Gegenpaar ist durch das Dreieck bestimmt, dessen Grundlinie die gegebene Kraft, und dessen Spitze der gegebene Punkt ist. Es liegt in der Ebene dieses Dreiecks, und seine Drehrichtung stimmt mit der des Kreispfeils überein, welcher in der schon wiederholt angegebenen Weise in das Dreieck gezeichnet wird.

Es ist leicht einzusehen, von welcher Bedeutung die oben behandelte Zerlegungsart für die Zusammensetzung beliebiger Kräfte, in einer Ebene oder im Raume gelegen, werden kann.

---

*) Vergl. Ritter „Technische Mechanik“ S. 527 (1. Auflage).

Es können auf diese Weise alle gegebenen Kräfte parallel mit sich selbst verschoben werden, bis sie durch einen und denselben Punkt, der dann als ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt angenommen werden kann, hindurchgehen. An demselben können sie dann mittelst des Kräftepolygons in jedem Falle zu einer Resultante vereinigt werden, wenn sie sich nicht an ihm das Gleichgewicht halten. Freilich bleiben dann noch ebenso viele Gegenpaare übrig, als Kräfte gegeben waren. Diese liegen alle in einer Ebene, wenn dies bei den gegebenen Kräften auch der Fall war und der gemeinschaftliche Angriffspunkt in der Ebene der Kräfte genommen wurde. Sie liegen aber in verschiedenen, sich schneidenden Ebenen, wenn die gegebenen Kräfte und der angenommene gemeinschaftliche Angriffspunkt der verschobenen beliebige Lagen im Raume haben. Es bleibt dann noch die Frage zu erörtern, ob und wie solche Gegenpaare mit einander vereinigt werden können? Die Beantwortung dieser Frage wird im Verlaufe des nächsten Abschnitts gegeben werden.

§. 38. Die Reduktion der Momente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis ist aber graphisch sehr leicht zu bewerkstelligen. Wie in §. 36 gezeigt, erhält man das Drehungsmoment einer Kraft unmittelbar als Flächeninhalt eines Dreiecks. Man darf also nur dieses in ein anderes von gleichem Flächeninhalte verwandeln, dessen Grundlinie gleich der Momentenbasis ist; die Höhe des neuen Dreiecks, so gemessen wie im vorigen §. gezeigt, gibt dann unmittelbar das Moment. Jene Verwandlung kann aber in ganz allgemeiner Weise so bewerkstelligt werden: Man durchschneidet in dem zu verwandelnden Dreieck ABC (Fig. 34, Tafel V) von irgend einer Ecke A aus die gegenüberliegende Grundlinie mit einem Radius gleich der Momentenbasis in D, zieht AD und parallel dazu durch einen der Endpunkte der Grundlinie die Linie BN; die vom anderen Endpunkte C auf diese letztere Linie gefällte Senkrechte CE ist die Höhe des verwandelten Dreiecks, dessen Grundlinie AD ist. In der That ist $AD \times CE = AD \times (CF + FE) = 2 \triangle ADC + 2 \triangle ADB = 2 \triangle ABC$.

Die Möglichkeit obiger Construktion wird dadurch bedingt, dass der senkrechte Abstand der Ecke A von der gegenüberliegenden Grundlinie kleiner ist als die Momentenbasis AD; dies kann aber, wenn es nicht der Fall sein sollte, leicht herbeigeführt werden. Man darf nur eine der von A ausgehenden Seiten, AB z. B., unter Festhaltung der gegenüberliegenden Ecke C in der Linie, in welcher sie liegt, verschieben; dadurch wird der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht geändert, der Punkt A kann aber der gegenüberliegenden Seite so nahe gebracht werden, als man will.

Die Höhe CE kann auch als Projektion der Grundlinie BC auf eine zur Geraden AD senkrechte Linie aufgefasst werden. Man nennt sie dann kürzer die Antiprojektion der Grundlinie BC auf die Linie AD. Unter Benützung dieser Bezeichnung kann man die Regel für die Verwandlung eines Momentendreiecks auch so aussprechen: Man durchschneidet von einer Ecke desselben aus mit einem Radius gleich der Momentenbasis die gegenüberliegende Grundlinie und zieht die Verbindungslinie dieser Ecke mit dem erhaltenen Schnittpunkt. Die Antiprojektion der Grundlinie auf diese Verbindungslinie ist dann die Höhe des verwandelten Dreiecks und repräsentirt also das Moment.

§. 39. **Drei Methoden, um das Drehungsmoment einer Kraft auf eine gegebene Basis zu reduciren.** — Wenden wir nun diese Construktion auf die Reduktion des Drehungsmomentes einer Kraft AP (Fig. 35, Taf. V) um den Momentenpunkt O, also auf die Verwandlung des Momenten-Dreiecks APO an. Dann bieten sich offenbar zwei Wege dar, die man einschlagen kann: man nimmt entweder den Momentenpunkt O oder einen der Endpunkte der Kraft AP als den Mittelpunkt an, von dem aus man die gegenüberliegende Dreieckseite mit einem Radius gleich der Momentenbasis durchschneidet.

1) Bei Verfolgung des ersten Weges muss die Momentenbasis H, mit welcher man vom Momentenpunkt O aus die gegenüberliegende Grundlinie zu durchschneiden hat, grösser genommen werden als die senkrechte Entfernung des Momentenpunktes von der Kraft AP. Denn berücksichtigt man die mechanische Bedeutung der Seiten des Dreiecks APO, so darf nur AP in der Linie, in welcher sie liegt, beliebig verschoben werden. Dadurch aber wird der senkrechte Abstand des Punktes O von ihr nicht geändert. Durchschneidet die Momentenbasis H von O aus die Linie, in welcher die Kraft liegt, in D, so ist die Antiprojektion PE oder h der Kraft AP auf die Verbindungslinie OD das reducirte Moment. Ist also z. B. die Momentenbasis H, auf dem Längenmassstab gemessen, gleich der Längeneinheit, so ist h, auf dem Kräftemassstab gemessen, das Drehungsmoment der Kraft AP um den Punkt O; ist aber H, auf dem Kräftemass-

stab gemessen, gleich der Krafteinheit, so gibt h, auf dem Längenmassstabe abgegriffen, jenes Moment.

Dass das Produkt $H \times h$ das Drehungsmoment der Kraft P um den Punkt O ist, kann auch noch auf andere Weise, blos mit Zuhülfenahme mechanischer Sätze, leicht bewiesen werden. Denn denkt man sich diese Kraft mit ihrem Angriffspunkt nach D verlegt und dort in die zwei Componenten AE und EP zerlegt, so geht die erste von diesen, wonöthig verlängert, durch den Punkt O, kann also keine Drehwirkung um denselben ausüben, ihr Hebelarm ist Null. Alle Drehwirkung der Kraft P rührt also von der Componente $EP = h$ her, die, in D wirkend, den Hebelarm H, also das Moment $H \times h$ hat. In dieser Weise betrachtet ist also hier die Momentenbasis H eigentlich ein Hebelarm und das reducirte Moment h eine Kraft.

2) In Verfolgung des zweiten oben angedeuteten Weges durchschneidet man vom Endpunkte P der Kraft AP aus (Fig. 36, Taf. V) die Verbindungslinie AO ihres Angriffspunktes mit dem Momentenpunkt mit einem Radius gleich der Momentenbasis H in D. Dies ist immer möglich, welche Grösse auch H haben mag; denn durch Verlegung der Kraft P in der Linie, in welcher sie liegt, kann deren Endpunkt der Linie AO so nahe gebracht werden, als man will. Verbindet man jenen Durchschnittspunkt D mit P, so ist die Antiprojektion AE der Linie AO auf diese Verbindungslinie das reducirte Moment h.

Dies kann wieder leicht mit Hülfe von Sätzen aus der Mechanik bewiesen werden. Denn denkt man sich die Kraft AP in die beiden Componenten AD und DP zerlegt, so geht die eine, AD, wonöthig verlängert, durch den Momentenpunkt O und kann also keine Drehwirkung ausüben. Die Drehwirkung der Kraft AP reducirt sich folglich auf die ihrer Componente H allein, und diese hat, in A wirkend, den Hebelarm $AE = h$, also das Drehungsmoment $H \times h$ um den Punkt O. In diesem Falle hat also die Momentenbasis H eigentlich die Bedeutung einer Kraft und das reducirte Moment h die eines Hebelarms.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so sieht man, dass in dem Produkt aus Kraft mal Hebelarm, welches ein Moment ausdrückt, auch bezüglich der Benennung die Faktoren mit einander verwechselt werden dürfen.

3) Da bei dem eben kennen gelernten Verfahren die Kraft P in der Linie, in welcher sie wirkt, beliebig verlegt werden darf und von der Lage des Angriffspunktes A die Richtungen der Componenten AD und DP abhängen, so ist klar, dass hiebei die Momentenbasis H, als Kraft aufgefasst, nicht blos ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach vorgeschrieben werden kann. Denn zerlegt man in einem beliebigen Angriffspunkt die Kraft P in zwei Componenten, von denen die eine gleich der Momentenbasis ist, welche der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorgeschrieben wurde, so kann man den Angriffspunkt der Kraft P in der Linie, in welcher sie wirkt, und mit ihm die beiden Componenten parallel mit sich selbst stets so verschieben, dass die zweite, verlängert, durch den Momentenpunkt O hindurchgeht und also keine Drehwirkung um diesen ausübt. Das Drehungsmoment der Kraft P ist dann wieder gleich dem ihrer Componente H, deren Hebelarm h die Entfernung des verlegten Angriffspunktes von einer durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen zu H ist.

Darauf gründet sich folgendes Verfahren für die Reduktion des Drehungsmomentes einer Kraft P (Fig. 37, Taf. V) um den Punkt O. Man trägt von dem Angriffspunkt A der Kraft aus die Momentenbasis H der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als AD ab und zieht die Verbindungslinie DP, welche, in diesem Sinne genommen, die zweite Componente, in welche P zerlegt werden kann, der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellt. Soll also diese

zweite Componente, natürlich im Angriffspunkte von P wirkend, verlängert durch den Momentenpunkt O gehen, so muss dieser Angriffspunkt in der Linie, in welcher die Kraft P wirkt, verschoben werden, bis er mit dem Punkt A′ zusammenfällt, wo die durch den Momentenpunkt gezogene Parallele zu DP jene Linie trifft. Die Entfernung A′E gleich h dieses Punktes von der durch O zu H gezogenen Parallelen ist folglich das reducirte Moment der Kraft P um den Punkt O.

§. 40. Zwei Methoden, um die Drehungsmomente beliebig vieler Kräfte in einer Ebene auf eine gemeinschaftliche Basis zu reduciren. — Es ist sehr leicht zu zeigen, wie die im vorigen §. kennen gelernten Methoden für die Reduktion des Drehungsmomentes einer Kraft angewendet werden können, wenn es sich darum handelt, diese Aufgabe für mehrere Kräfte zugleich zu lösen, die alle in einer Ebene liegen, in der sich auch der Momentenpunkt befindet.

1) In Anwendung der ersten Methode wird man um den Momentenpunkt O (Fig. 38, Taf. V) mit einem Radius gleich der Momentenbasis H einen Kreis beschreiben und die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3...., gleichviel nach welcher Seite hin, verlängern, bis sie die Peripherie jenes Kreises in den Punkten D_1, D_2, D_3.... schneiden. Damit in jedem Falle ein solcher Schnittpunkt gefunden wird, darf nur die Basis H grösser angenommen werden, als die grösste vorkommende Entfernung des Punktes O von einer Kraft. Verbindet man die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3... mit dem Momentenpunkt O und construirt die Antiprojektionen h_1, h_2, h_3..... der Kräfte auf diese Verbindungslinien, so sind diese Antiprojektionen die auf die gemeinschaftliche Momentenbasis H reducirten Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O.

2) Die Anwendung der zweiten Methode oder vielmehr der Modification derselben unter Nr. 3 des vorigen §. führt zu folgendem Verfahren, die Momente der in derselben Ebene gelegenen Kräfte P_1, P_2, P_3.... (Fig. 39, Taf. V) in Bezug auf einen Punkt O derselben Ebene auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis H zu reduciren. Man trägt von den Angriffspunkten A_1, A_2, A_3... der Kräfte die Momentenbasis H in beliebiger aber überall gleicher Richtung und in demselben Sinne als $A_1 D_1$, $A_2 D_2$, $A_3 D_3$...... ab; verbindet die Endpunkte D_1, D_2, D_3..... mit den Endpunkten P_1, P_2, P_3..... der Kräfte und zieht durch den Momentenpunkt Parallele zu diesen Verbindungslinien, bis sie die Linien, in welchen die Kräfte wirken, in A'_1, A'_2, A'_3.... schneiden. Die senkrechten Entfernungen h_1, h_2, h_3.... dieser Schnittpunkte von der durch den Momentenpunkt O gezogenen Parallelen zur Basis H sind die reducirten Momente der gegebenen Kräfte um den Punkt O.

§. 41. Drehrichtung, Vorzeichen der Drehungsmomente. — Wir haben bisher immer blos die absolute Grösse des Drehungsmomentes einer Kraft um einen Punkt im Auge gehabt. Die Momente von Kräften aber, die alle in einer Ebene liegen, bezogen auf einen Punkt dieser Ebene, lassen sich auch qualitativ von einander unterscheiden, je nachdem die Kraft nämlich die Ebene um den Punkt in dem einen oder im entgegengesetzten Sinne zu drehen sucht.

Wir werden in der Folge die Drehung einer Ebene, die wir vor uns liegend annehmen, um einen Punkt in ihr rechtsseitig nennen, wenn sich die links vom Punkte gelegenen Theile ober ihn weg nach rechts hinüberbewegen, wenn also die Drehrichtung mit derjenigen des Zeigers einer Uhr übereinstimmt; die entgegengesetzte Drehrichtung heisst dann natürlich linksseitig. Man nennt auch wohl die eine, gewöhnlich die erstere Drehrichtung, die positive, die andere die negative. Dem entsprechend versieht man da, wo die Drehrichtung berücksichtigt werden soll die Drehungsmomente von Kräften in einer Ebene um einen Punkt dieser Ebene mit dem Vorzeichen +, wenn die betr. Kraft die Ebene um den Momentenpunkt rechtsseitig zu drehen sucht; im

anderen Fall mit dem Zeichen —. Dieselben Vorzeichen behalten dann natürlich auch die reducirten Momente.

An den in Fig. 38, Taf. V auf die erste Methode des vorigen §. erhaltenen reducirten Momenten h_1, h_2 .... lässt sich kein unmittelbar in die Augen fallendes Merkmal angeben, durch welches ihr Vorzeichen zu bestimmen wäre. Man muss hier immer auf die Drehrichtung der Kräfte P_1, P_2 ... selbst oder doch auf die der Componenten $A_1 E_1$, $A_2 E_2$ .... zurückgehen, welch' letztere man aber dabei stets parallel mit sich selbst in die Schnittpunkte D_1, D_2 ... verlegen muss. So findet man, dass obigen Annahmen zufolge die reducirten Momente h_2 und h_4 mit dem positiven, die h_1 und h_3 mit dem negativen Vorzeichen zu versehen sind. Dagegen lässt sich bei Anwendung der zweiten Methode für die Aufsuchung der reducirten Momente von Kräften in einer Ebene, nach welcher Methode Fig. 39, Taf. V gezeichnet wurde, sofort aus der Lage der h erkennen, welches Vorzeichen ihnen zukommt. Denn da die Momentenbasis H bei jeder Kraft nach derselben Seite hin gekehrt ist und h die Hebelarme der Componente H bedeuten, in welche jede Kraft zerlegt wird, so muss das Drehungsmoment positiv oder negativ sein, je nachdem das betr. h auf der einen oder anderen Seite der durch den Momentenpunkt O zu H gezogenen Parallelen liegt. Unseren obigen Annahmen gemäss ist den unterhalb jener Parallelen gelegenen h das Zeichen +, den oberhalb gelegenen das Zeichen — zu geben.

§. 42. Drehungsmoment der Resultante von Kräften in einer Ebene. — Bezüglich der Gesammtdrehwirkung von Kräften in einer Ebene um einen Punkt dieser Ebene existirt ein sehr einfacher Satz: Das Drehungsmoment der Resultante von Kräften in einer Ebene um einen Punkt derselben ist gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der Componenten, wobei die Drehungsmomente auf die im vorigen §. besprochene Weise mit ihren Vorzeichen zu versehen sind.

Um diesen Satz zu beweisen, erinnern wir zunächst an den in §. 19 entwickelten. Nach demselben verhalten sich in dem Fall, wo blos zwei, aber gleichviel ob parallele oder sich schneidende Kräfte in eine Resultante vereinigt sind, die senkrechten Entfernungen irgend eines Punktes dieser Resultante von den Componenten umgekehrt wie diese Componenten. Verwandelt man die so ausgesprochene Proportion in eine Gleichung, so sagt diese, dass das Produkt aus der einen Componente in ihre senkrechte Entfernung von irgend einem Punkt der Resultante gleich demselben Produkt für die andere Componente in Bezug auf den nämlichen Punkt ist, oder dass die Drehungsmomente der beiden Componenten um einen beliebigen Punkt ihrer Resultante gleichgross sind. Das Drehungsmoment der Resultante um einen Punkt in ihr ist Null. Die Drehrichtungen der beiden Componenten für einen solchen Punkt sind, wie man sich durch Betrachtung der in den Figuren 12 bis 14, Tafel I dargestellten Fälle leicht überzeugt, stets entgegengesetzt; und da die Drehungsmomente nach obiger Entwickelung gleichgross sind, so ist ihre algebraische Summe gleich Null. Für den hier in Rede stehenden speziellen Fall ist also der oben ausgesprochene allgemeine Satz schon erwiesen.

Nehmen wir nun wieder bloss zwei in einer Ebene gelegene, gleichviel ob parallele oder sich schneidende Kräfte, aber den Momentenpunkt ausserhalb ihrer Resultante gelegen. In Fig. 40, Taf. VI seien $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ die zwei geraden Linien, in welcher beide Kräfte liegen, RS diejenige, in welcher ihre Resultante wirkt; O sei der Momentenpunkt. Durch denselben ziehen wir eine beliebige Linie, welche die $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ in A_1 und A_2, die Linie RS in O' schneidet. Nach A_1 und A_2 verlegen wir die Angriffspunkte der beiden Componenten, tragen dieselben also von hier aus als A_1P_1 und A_2P_2 ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf. Dann sind die

Dreiecke $A_1 P_1 O'$ und $A_2 P_2 O'$, welche die Drehungsmomente jener Componenten um den Punkt O' repräsentiren, an Flächeninhalt einander gleich. Die Drehungsmomente der Componenten um den Punkt O aber werden durch die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke $A_1 P_1 O$ und $A_2 P_2 O$ repräsentirt, von denen das erstere stets gleich der algebraischen Summe der Dreiecke $A_1 P_1 O'$ und $O' O P_1$, das letztere gleich der algebraischen Summe der Dreiecke $A_2 P_2 O'$ und $O' O P_2$ ist. Unter Berücksichtigung also, dass die durch die Dreiecke $A_1 P_1 O'$ und $A_2 P_2 O'$ repräsentirten Drehungsmomente von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Vorzeichen sind, ist die algebraische Summe der Drehungsmomente der Componenten um den Punkt O gleich der doppelten algebraischen Summe der Dreiecke $O' O P_1$ und $O' O P_2$. Diese können durch Ziehen der Parallelen $P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$ zu $A_1 A_2$ in die gleichgrossen $O' O P_1'$ und $O' O P_2'$ verwandelt werden. Die algebraische Summe dieser letzteren Dreiecke ist aber einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie, in $R S$ gelegen, gleich der algebraischen Summe der Grundlinien $O' P_1'$ und $O' P_2'$ ist, und dessen Spitze in O liegt. Die Grundlinien $O' P_1'$ und $O' P_2'$ sind ferner nichts anderes, als die in der Richtung $A_1 A_2$ genommenen Projektionen der Componenten auf die Linie $R S$, in welcher die Resultante liegt. Die algebraische Summe dieser Projektionen ist gleich der Resultante. Folglich ist die algebraische Summe der Dreiecke $O' O P_1'$ und $O' O P_2'$ gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie die Resultante ist, und dessen Spitze in O liegt, dessen doppelter Flächeninhalt also gleich dem Drehungsmoment der Resultante um O ist. Und damit ist der obige Satz zunächst für zwei Kräfte erwiesen.

Man denke sich endlich die Resultante mehrerer, in einer Ebene gelegenen Kräfte so gefunden, dass man zuerst zwei derselben in eine Mittelkraft vereinigt, mit dieser dann die dritte u. s. w. f. und wende jedesmal den obigen Momentensatz für zwei Kräfte an, indem man immer den nämlichen Momentenpunkt beibehält, so ergibt sich sehr einfach der oben ausgesprochene allgemeine Satz für Kräfte in einer Ebene.

§. 43. Drehungsmoment eines Gegenpaars, Vereinigung von Gegenpaaren in einer Ebene unter sich und mit Kräften derselben Ebene. — Der im vorigen §. erwiesene Satz setzt natürlich voraus, dass eine Resultante der gegebenen Kräfte existirt. Es entsteht daher die Frage, wie gross die algebraische Summe der Momente zunächst zweier paralleler und entgegengesetzter Kräfte sei, die ein Gegenpaar bilden, oder deren Resultante eine unendlich kleine Kraft in der unendlich fernen Geraden der Ebene des Gegenpaars ist? Diese Frage ist sehr leicht zu beantworten. Seien P_1 und P_2 (Fig. 41, Taf. VI) zwei solche Kräfte und O ein beliebiger Momentenpunkt in ihrer Ebene. Dann sind $A_1 P_1 O$ und $A_2 P_2 O$ die Dreiecke, deren doppelter Flächeninhalt den Drehungsmomenten der betr. Kräfte gleich sind. Zieht man die Verbindungslinie $A_1 P_2$ und durch den Momentenpunkt O eine Parallele zu den Kräften, bis jene Verbindungslinie in O' getroffen wird, so kann anstatt des Momentenpunktes O sofort der O' genommen werden, ohne dass die Drehungsmomente der Kräfte sich ändern: die Dreiecke $A_1 P_1 O'$ und $A_2 P_2 O'$ sind bezw. den Dreiecken $A_1 P_1 O$ und $A_2 P_2 O$ gleich. Berücksichtigt man nun, dass wegen des Parallelismus der Verbindungslinien $P_1 A_2$ und $A_1 P_2$ das Dreieck $A_2 P_2 O'$ dem Dreieck $P_1 P_2 O'$ gleich ist, so ergibt sich leicht, dass die algebraische Summe der Dreiecke $A_1 P_1 O'$ und $A_2 P_2 O'$ gleich dem Dreieck $A_1 P_1 P_2$ ist. Dies gilt, ob jene algebraische Summe eine Differenz wird wie in dem Falle unserer Figur, wo der Momentenpunkt O und also auch der O' ausserhalb der beiden Kräfte des Gegenpaars liegt, so dass diese entgegengesetzte Drehrichtungen um ihn haben — oder ob jene algebraische Summe eine wirkliche ist wie da, wo der Momentenpunkt zwischen den nun in einerlei Richtung um ihn drehenden Kräften des Gegenpaars liegt.

Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1P_1P_2$ ist also gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der Kräfte des Gegenpaares oder, wie man kurz sagt, gleich dem Drehungsmomente des Gegenpaares und zwar um irgend einen Punkt in der Ebene desselben. Denn in der That kommt es, wie obige Beweisführung zeigt, auf die spezielle Lage des Punktes O gar nicht an; das Endresultat für die algebraische Summe der Drehungsmomente ist stets der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1P_1P_2$ oder das Produkt aus einer der Kräfte des Gegenpaars in den Arm desselben, wo auch der Punkt O liegen mag; und ebenso ist die Drehrichtung, in welcher das Gegenpaar die Ebene zu drehen sucht, um jeden ihrer Punkte die nämliche. Dies stimmt vollständig überein mit der Eigenschaft der Gegenpaare, die wir in §. 21 nachgewiesen haben, dass sie in ihrer Ebene beliebig verlegt werden dürfen; es entspricht auch dem Charakter des Gegenpaars als einer unendlich kleinen Kraft in der in unendlicher Entfernung gelegenen Geraden seiner Ebene, gegenüber welcher Entfernung eine Verlegung des Momentenpunktes innerhalb endlicher Grenzen natürlich verschwindet.

Aber die Uebereinstimmung der obigen Resultate mit den Ausführungen im §. 21 geht noch weiter. Das Dreieck $A_1P_1P_2$, dessen doppelter Flächeninhalt das Drehungsmoment des Gegenpaares repräsentirt, ist gleich jedem Dreieck, dessen Grundlinie die eine Kraft des Gegenpaars ist, und dessen Spitze in der anderen liegt. Letztere Dreiecke haben wir in §. 21 als charakteristisch für ein Gegenpaar erkannt. Dasselbe kann in seiner Ebene beliebig verlegt und verändert werden, wenn nur immer der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die eine Kraft ist, und dessen Spitze in der anderen liegt, das nämliche bleibt. Wir können jetzt kürzer sagen, dass das Drehungsmoment des Gegenpaars bei jener Veränderung und Verlegung gleichgross bleiben muss.

Es versteht sich wohl von selbst, dass wenn unter Kräften, welche alle in einer Ebene liegen, Gegenpaare vorkommen, die Kräfte derselben entweder einzeln oder als Gegenpaare bei der Herstellung der algebraischen Summe aller Drehungsmomente genommen werden können. Diese algebraische Summe ist stets gleich dem Drehungsmoment der Resultante, wenn eine solche vorhanden, ev. dem Drehungsmoment des Gegenpaars, in das sich die Kräfte vereinigen lassen (§. 28), oder im Falle des Gleichgewichts Null für jeden Momentenpunkt in der Ebene.

Speziell bei der Zusammensetzung einer Kraft und eines Gegenpaars, welche beide in der nämlichen Ebene liegen, wird, wie in §. 26 gezeigt, die Kraft parallel mit sich selbst um so viel verschoben, dass die Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie die gegebene Kraft und dessen Flächeninhalt gleich dem des charakteristischen Dreiecks des Gegenpaars ist, in der verschobenen Kraft liegt; und die Richtung der Verschiebung ist dadurch bestimmt, dass ein Gegenpaar, dessen eine Kraft die verschobene und dessen andere Kraft gleich und in derselben Linie entgegengesetzt der gegebenen ist, dieselbe Drehrichtung hat wie das gegebene. Wir können jetzt kurz so sagen, dass bei der Zusammensetzung einer Kraft mit einem Gegenpaar in derselben Ebene die Kraft parallel mit sich selbst so weit und in solcher Richtung verschoben wird, dass ihr Drehungsmoment um irgend einen Punkt der Ebene um das des Gegenpaars algebraisch vergrössert wird.

Wenn mehrere Gegenpaare von verschiedenen Drehungsmomenten und Drehrichtungen in derselben Ebene liegen, so ist die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente ein Drehungsmoment, welches, gleichwie das der einzelnen Summanden, für jeden Punkt der Ebene der Grösse und dem Vorzeichen nach das nämliche ist. Es gehört also einem Gegenpaar an,

dem Resultantengegenpaar der gegebenen. In der That überzeugt man sich auch direkt leicht, dass das Resultat der Vereinigung zweier oder mehrerer Gegenpaare in einer Ebene wieder ein Gegenpaar ist; man darf nur die Gegenpaare alle so verwandeln, dass sie den nämlichen Arm erhalten, und dann so verlegen, dass ihre Kräfte in die nämlichen zwei, um die Länge jenes Arms voneinander entfernten parallelen Geraden fallen. Diese Vereinigung der Gegenpaare entspricht ganz derjenigen von Kräften (§. 8), die in einer und der nämlichen Geraden, hier in der unendlich fernen Geraden der Ebene wirken, in welcher die Gegenpaare liegen; man darf sich nur jede solche Kraft durch das Moment des Gegenpaars repräsentirt denken.

§. 44. Parallele Verschiebung einer Kraft und Benützung dieses Mittels bei der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene; Gleichgewichtsbedingungen für dieselben. — Wenn man eine Kraft parallel mit sich selbst verschiebt, oder wenn man, wie auch oft gesagt wird, ihren Angriffspunkt in einen Punkt verlegt, der ausserhalb der geraden Linie liegt, in der sie wirkt, so muss man zu der verschobenen Kraft ein Gegenpaar hinzunehmen, welches durch das Dreieck bestimmt ist, dessen Grundlinie die gegebene Kraft ist, und dessen Spitze im neuen Angriffspunkt liegt. Der Kreispfeil dieses Dreiecks, dessen Richtung mit jener der gegebenen Kraft übereinstimmt, bezeichnet die Drehrichtung des Gegenpaars (§. 35). Man sagt in diesem Falle wohl auch, man habe die gegebene Kraft in die parallel verschobene und in das Gegenpaar zerlegt, dessen Drehungsmoment, wie unmittelbar ersichtlich, einfach das der ursprünglichen Kraft um den neuen Angriffspunkt ist.

Wenn mehrere beliebige Kräfte, sämmtlich in einer Ebene gelegen, gegeben sind, so kann man dieselben auf obige Weise alle in ein und den nämlichen Angriffspunkt O verlegen. Man erhält dann in diesem Punkte ebensoviele Kräfte, als ursprünglich gegeben waren, welche in Grösse, Richtung und Sinn mit diesen gegebenen übereinstimmen; und ausserdem noch eine ebenso grosse Anzahl von Gegenpaaren, deren Drehungsmomente der Grösse und Richtung nach durch die Dreiecke mit ihren Kreispfeilen bestimmt werden, deren Grundlinien die gegebenen Kräfte sind, deren Spitzen in dem Punkte O liegen, und welche offenbar nichts anderes bedeuten, als die Drehungsmomente der ursprünglich gegebenen Kräfte um diesen Punkt. Jene im Punkte O wirkenden Kräfte lassen sich durch ein ebenes Kräftepolygon zu einer Resultante R' vereinigen, die gleichfalls in O angreift, oder sie sind im Gleichgewicht. Die algebraische Summe der Drehungsmomente der Gegenpaare gibt nach vorigem §. das Drehungsmoment eines Gegenpaars in derselben Ebene, welches man schliesslich noch mit der Resultante R' vereinigen kann. Dies geschieht auf bekannte Weise dadurch, dass man die Kraft R' so weit und nach solcher Richtung hin parallel mit sich selbst verschiebt, dass ihr Drehungsmoment um irgend einen Punkt der Ebene um das des Gegenpaars algebraisch vergrössert wird. Die so verschobene Kraft R ist offenbar die Resultante sämmtlicher Kräfte und der Weg, welcher zu ihrer Auffindung eingeschlagen wurde, derjenige, welcher zu Ende des vorigen Abschnitts angedeutet worden ist.

Sind die im Angriffspunkte O wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, also die Resultante R gleich Null, nicht aber die algebraische Summe der Drehungsmomente der Gegenpaare, so erhält man für die gegebenen Kräfte bei ihrer Vereinigung ein Resultantengegenpaar, dessen Drehungsmoment gleich jener algebraischen Summe, oder was ganz dasselbe ist, gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der gegebenen Kräfte um den Punkt O ist. Wird dagegen die algebraische Summe der Drehungsmomente um den Punkt O gleich Null, nicht aber die Resultante R', so ist diese sogleich die gesuchte Resultante der Kräfte; sind endlich beide, die Resul-

tante R' und die algebraische Summe der Drehungsmomente Null, so sind die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

Die Resultante R' ist die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons, das aus den nach O verlegten oder ursprünglichen Kräften construirt wird. Nach einem bekannten geometrischen Satz ist die Projektion jener Verbindungslinie auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projektionen der Polygonseiten, also auch gleich der algebraischen Summe der Projektionen der gegebenen Kräfte auf dieselbe Linie. Für ein ebenes Polygon ist aber jene Verbindungslinie Null, wenn ihre Projektionen auf zwei von einander verschiedenen Richtungen in seiner Ebene Null sind. Daraus und aus obigen Betrachtungen folgt der Satz: Kräfte in einer Ebene sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Projektionen auf zwei von einander verschiedene Richtungen dieser Ebene und die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente um irgend einen Punkt derselben Ebene Null wird. —

§. 45. Construktion der Drehungsmomente gegebener Kräfte in einer Ebene mittelst des Seilpolygons derselben. Wenn aus beliebigen in einer Ebene gelegenen Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ (Fig. 42, Taf. VI) das Kräfte- und das Seilpolygon 0 1 2 3.... und 0 I II III.... construirt sind, dann lassen sich die Drehungsmomente dieser Kräfte um einen beliebigen Punkt O in der Ebene noch in einer Weise ausdrücken, deren Benützung in manchen Fällen und besonders in einem, bald näher zu bezeichnenden grosse Vortheile bietet. Zieht man nämlich durch den Punkt O Parallele $OQ_1, OQ_2, OQ_3 \ldots$ zu den Kräften und verlängert für jede der letzteren die ihr vorangehende sowohl als die ihr nachfolgende Seilpolygonseite, bis sie die Parallele zur Kraft schneiden, dann ist das Produkt aus dem Abschnitt zwischen den hiedurch erhaltenen Schnittpunkten in die senkrechte Entfernung des Poles C von derjenigen Seite des Kräftepolygons, welche der betreffenden Kraft entspricht, gleich dem Drehungsmoment dieser Kraft um den Momentenpunkt O.

Dies ist sehr leicht zu beweisen. Für die Kraft P_2 z. B. ist das Dreieck $a_2 m_2$ II im Seilpolygon ähnlich dem Dreieck 1 2 C im Kräftepolygon. Die Grundlinien $a_2 m_2$ und 1 2 dieser Dreiecke verhalten sich also wie die zugehörigen Höhen. Die Höhe des Dreiecks $a_2 m_2$ II ist aber nichts anderes als die senkrechte Entfernung der Kraft P_2 vom Momentenpunkt O oder ihr Hebelarm L_2; die Höhe des Dreiecks 1 2 C ist die senkrechte Entfernung des Poles C von der Kräfte-Polygonseite 1 2; wir wollen sie mit H_2 bezeichnen. Nun folgt aus der Proportion

$$\overline{a_2 m_2} : \overline{1\,2} = L_2 : H_2$$

die Produktengleichung

$$\overline{a_2 m_2} \times H_2 = \overline{1\,2} \times L_2,$$

in welcher das zweite Produkt nach der ursprünglichen Definition das Drehungsmoment der Kraft P_2 um den Punkt O bedeutet; das erste Produkt hat folglich die nämliche Bedeutung.

Es versteht sich von selbst, dass die eben kennen gelernte Ausdrucksweise für das Drehungsmoment einer einzelnen Kraft sofort auf das der Resultante mehrerer aufeinander folgenden Kräfte angewendet werden kann. Denn diese ist im Allgemeinen nichts anderes als eine Kraft, welche durch den Durchschnittspunkt der den Componenten zugehörigen äussersten Seilpolygonseiten hindurch geht, und deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale repräsentirt ist, welche im Kräftepolygon die den Componenten entsprechenden Seiten unterspannt. Wenn folglich das Drehungsmoment einer solchen Resultante P_{1-3} z. B. (Fig. 42, Taf. VI) um einen Punkt O gefunden werden soll, so darf man nur durch diesen Punkt eine Parallele zu ihr, also zur Diagonale 0 3 ziehen, welche im Kräftepolygon die den Componenten

entsprechenden Seiten unterspannt, und hierauf die äussersten Seilpolygonseiten 0 I und III IV verlängern, bis sie jene Parallele schneiden. Das Produkt aus dem dadurch erhaltenen Abschnitt $a_{1-3}\, m_{1-3}$ auf der Parallelen in die senkrechte Entfernung des Poles C von der Diagonale 0 3, welche die Resultante im Kräftepolygon repräsentirt, ist dann das Drehungsmoment der Resultante um den Punkt O, also nach §. 42 die algebraische Summe der Drehungsmomente der Componenten P_1, P_2, P_3 um denselben Punkt.

Dieser Satz ist, wie auf den ersten Blick scheint, nicht mehr anwendbar in dem Falle, wo das Kräftepolygon aus den Kräften, um deren Gesammtdrehungsmoment es sich handelt, geschlossen ist. Denn dann wird die Diagonale, welche sie alle unterspannt, Null und ihre Richtung unbestimmt. Schliesst sich das Seilpolygon ebenfalls, fallen also dessen äusserste Seiten zusammen, so wird der zwischen ihnen liegende Abschnitt auf jeder sie schneidenden Linie Null. Solche Kräfte sind aber im Gleichgewicht, und die algebraische Summe ihrer Momente verschwindet für jeden Punkt in ihrer Ebene. Wenn aber die äussersten Seilpolygonseiten nicht zusammenfallen, sondern nur parallel sind, so erhält man einen Abschnitt zwischen denselben auf jeder sie schneidenden Linie. Nun geben Kräfte, deren Kräftepolygon sich schliesst, während das Seilpolygon offen bleibt, ein Gegenpaar, dessen Kräfte in den äussersten Seilpolygonseiten liegen und eine Grösse haben, gleich dem Strahl vom Pol nach dem Anfangspunkt des Kräftepolygons. Dies berücksichtigt, lässt sich leicht zeigen, dass das Drehungsmoment jenes Gegenpaares stets gleich dem Produkte wird, dessen einer Faktor der Abschnitt ist, welchen die parallelen äussersten Seilpolygonseiten auf irgend einer sie schneidenden Linie machen, und dessen anderer Faktor der Abstand des Pols im Kräftepolygon von derjenigen Parallelen zu dieser Linie ist, welche durch den Anfangspunkt des letztgenannten Polygons gelegt wird. Wenn man also in dem Falle, wo das Kräftepolygon auf einander folgender Kräfte sich schliesst, der Diagonale, welche sie alle unterspannt, und deren Grösse Null und Richtung unbestimmt wird, eine ganz beliebige Richtung gibt, nur nicht gerade die durch den Pol gehende, so lässt sich der oben ausgesprochene Satz auch auf diesen Fall anwenden.

Wir denken uns in die durch den Momentenpunkt O (Fig. 42, Taf. VI) zu den Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ gezogenen Parallelen $O\,Q_1$, $O\,Q_2$, $O\,Q_3 \ldots$ denselben Sinn gelegt, den die betreffenden Kräfte haben. Dies geben wir dadurch zu erkennen, dass wir den Buchstaben Q, versehen mit entsprechendem Index, auf diejenige Seite von O an jene Parallelen schreiben, dass die von O nach Q genommene Richtung jenem Sinne entspricht. — Die Endpunkte des Abschnittes auf jeder solchen Parallelen bezeichnen wir mit den Buchstaben a und m, versehen mit dem entsprechenden Index, und zwar schreiben wir stets den Buchstaben a an den Schnittpunkt der Parallelen mit mit der in der natürlichen Ordnung vorhergehenden Seilpolygonseite, den Buchstaben m an den Schnittpunkt mit der nachfolgenden und fassen den Sinn des Abschnitts stets in der Richtung won a nach m auf. Dies vorausgesetzt, ergibt sich für die Drehrichtung der Kräfte um den Momentenpunkt, also für das Vorzeichen der Drehungsmomente leicht die folgende Regel: Wenn der Pol C im Kräftepolygon auf der nämlichen rechten oder linken Seite zweier oder mehrerer Kräfte in jenem Polygon gelegen ist, wobei diese Kräfte in dem ihnen eigenthümlichen Sinn aufzufassen sind, so ist die Drehrichtung dieser Kräfte um den Momentenpunkt die eine oder die andere, je nachdem der Sinn des zugehörigen Abschnittes a m mit dem der Parallelen, in welcher er liegt, übereinstimmt oder nicht. Wenn aber bei zwei Kräften, die mit einander verglichen werden, der Pol C im Kräftepolygon auf verschiedenen Seiten der jenen Kräften entsprechenden Kräfte-Polygonseiten liegt, dann haben beide Kräfte gleiche Drehrichtung, wenn bei der einen der Sinn des Abschnittes a m mit dem der Parallelen, auf welcher er liegt, übereinstimmt, bei der

anderen nicht; sie haben aber entgegengesetzte Drehrichtungen, wenn beidesmal die Sinne der Abschnitte am und der zugehörigen Parallelen übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

Kürzer lässt sich diese Regel so ausdrücken. Versieht man die Entfernung des Poles C von der einer gewissen Kraft oder Resultante entsprechenden Kräftepolygon-Seite oder -Diagonale mit dem Zeichen + oder —, je nachdem C auf der einen, z. B. rechten oder auf der anderen, linken Seite jener Polygonseite oder Diagonale liegt; und gibt man dem zugehörigen Abschnitt am das Zeichen + oder —, je nachdem sein Sinn mit dem der Parallelen, in welcher er liegt, übereinstimmt oder nicht, so gibt das Produkt jener beiden Grössen das Drehungsmoment nicht blos der Grösse, sondern auch dem Vorzeichen nach, d. h. die Drehrichtung der betr. Kraft oder Resultante ist die eine oder andere, je nachdem das Vorzeichen jenes Produkts + oder — wird.

So liegt in Fig. 42 der Pol C im Kräftepolygon auf einerlei, auf der rechten Seite nämlich der Seiten 0 1, 1 2, 2 3 und der Diagonale 0 3. Daher haben die Kräfte P_1 und P_2, bei welchen beiden der Sinn der Abschnitte $a_1 m_1$ und $a_2 m_2$ mit dem der Parallelen $O Q_1$ und $O Q_2$, in denen sie liegen, übereinstimmt, gleiche Drehrichtung; ebenso haben die Kraft P_3 und die Resultante P_{1-3}, bei welchen beiden der Sinn der Abschnitte $a_3 m_3$ und $a_{1-3} m_{1-3}$ entgegengesetzt von dem der Parallelen $O Q_3$ und $O Q_{1-3}$ ist, gleiche Drehrichtung unter sich, aber entgegengesetzt derjenigen der ersten beiden Kräfte.

Da indessen die Drehrichtung einer Kraft oder Resultante um einen Momentenpunkt in der Regel leicht direkt angegeben werden kann, so haben obige Regeln für die unmittelbare Anwendung keinen grossen Werth.

§. 46. Construktion der reducirten Drehungsmomente gegebener Kräfte in einer Ebene mittelst des Seilpolygons derselben. — Die Momente von Kräften in einer Ebene und deren Resultanten stellen sich, auf die im vorigen §. behandelte Weise construirt, wieder als Produkte zweier Linien, als Flächen dar. Für ein consequentes Verfolgen des graphischen Verfahrens ist es also auch hier wieder nothwendig, die Drehungsmomente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis zu reduciren. Diese Reduktion würde sich ganz von selbst ergeben, wenn man dem Pol im Kräftepolygon gleiche Entfernung von allen Seiten und Diagonalen desselben geben könnte. Die Abschnitte auf den durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen im Seilpolygon würden dann sofort die reducirten Momente sein. Das ist aber nur bei parallelen Kräften möglich, für welche das ganze Seilpolygon in eine gerade Linie fällt. Für solche Kräfte ist daher das in Rede stehende Verfahren zur Aufsuchung ihrer Drehungsmomente ganz besonders von Vortheil wie in folgendem §. noch mehr hervortreten wird.

Wenn man es aber mit beliebigen Kräften in einer Ebene zu thun hat, und es ist aus denselben das Kräfte- und Seilpolygon noch nicht construirt, so kann man den willkürlich anzunehmenden Pol im Kräftepolygon leicht so wählen, dass man das reducirte Moment einer oder der anderen Kraft oder Resultante sofort unmittelbar bekommt. Wenn es z. B. blos darauf ankommt, das reducirte Moment der Resultante sämmtlicher Kräfte (also die algebraische Summe ihrer reducirten Momente) zu finden, so wird man den Pol im Kräftepolygon in einer Entfernung gleich der Momentenbasis von der Diagonale, welche sämmtliche Kräfte unterspannt, sonst aber beliebig annehmen und für ihn das Seilpolygon zeichnen. In demselben ist dann der Abschnitt auf der durch den Momentenpunkt zur Resultante gezogenen Parallelen, welcher von den äussersten Seilpolygonseiten gemacht wird, das reducirte Moment der Resultante.

Ist aber das Kräfte- und Seilpolygon gegebener Kräfte in einer Ebene schon gezeichnet, so können durch ein Verfahren, das mindestens ebenso einfach ist als die beiden im §. 40 gezeigten, die Momente sämmtlicher einzelner Kräfte sowohl, als auch die von Resultanten einer

beliebigen Anzahl aufeinanderfolgender derselben auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reducirt werden. Man darf nur jedesmal für irgend eine solche Kraft oder Resultante einen neuen Pol im Kräftepolygon annehmen, der von der betr. Seite oder Diagonale desselben um die Momentenbasis entfernt ist und für diesen Pol das neue Seilpolygon oder vielmehr nur den zur Erreichung des vorgesetzten Zweckes nothwendigen Theil desselben zeichnen. Wenn dann jener neue Pol immer auf der nämlichen, entweder linken oder rechten Seite der betr. Kraft oder Resultante im Kräftepolygon angenommen wird, so gibt der Sinn des Abschnitts auf der durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen, ob er mit demjenigen dieser Parallelen übereinstimmt oder nicht, sogleich die Drehrichtung der betr. Kraft oder Resultante zu erkennen.

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie dies Verfahren am einfachsten durchzuführen ist. In Fig. 43b), Taf. VI seien P_1, P_2, P_3 ... gegebene Kräfte, welche in Fig. 43a) zum Kräftepolygon 0 1 2 3 4... aneinander getragen sind. C sei ein willkürlicher Pol dieses Polygons, für den in Fig. 43b) das Seilpolygon 0 I II III IV V .... gezeichnet ist. Durch den Momentenpunkt O seien die Parallelen OQ_1, OQ_2, OQ_3 ..., dann OQ_{1-4} zu den Kräften und bezw. zur Resultante 0 4 der vier ersten derselben gezogen. Die Abschnitte $a_1 m_1$, $a_2 m_2$, $a_3 m_3$ ... und $a_{1-4} m_{1-4}$ auf diesen Parallelen, multiplicirt mit den Entfernungen des Poles C von den Seiten 0 1, 1 2, 2 3 ... und bezw. der Diagonale 0 4, geben die Drehungsmomente jener Kräfte und der Resultante 0 4 in Bezug auf den Punkt O.

Um diese Drehungsmomente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis zu reduciren, nehmen wir für jede der Kräfte P_1, P_2, P_3 ... oder für die Resultante P_{1-4} einen neuen Pol C_1, C_2, C_3 ..., C_{1-4} im Kräftepolygon an, welcher stets auf der nämlichen, linken Seite der betr. Kraft in einer Entfernung gleich der Momentenbasis von derselben, und zwar in den nach dem alten Pol gezogenen Anfangsstrahlen 0 C, 1 C, 2 C ... und bezw. 0 C (für die Resultante) liegt. Von den diesen Polen zugehörigen Seilpolygonen sind dann für unseren Zweck immer nur die der betr. Kraft vorangehende und nachfolgende Seite, bei der Resultante die äusserste vorangehende und äusserste nachfolgende Seite zu zeichnen. Die vorangehenden Seiten aber kann man zufolge der speziellen oben bezeichneten Lage der neuen Pole mit den betreffenden alten Seilpolygonseiten 0 I, I II, II III ...... und bezw. 0 I (für die Resultante) zusammenfallen lassen. Dann hat man durch die Schnittpunkte I, II, III ...... und α dieser Seiten mit den betr. Kräften*) die neuen nachfolgenden Seilpolygonseiten parallel zu den neuen Endstrahlen $1\,C_1$, $2\,C_2$, $3\,C_3$ ..., dann $4\,C_{1-4}$ im Kräftepolygon zu ziehen, bis sie die durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen in den Punkten m'_1, m'_2, m'_3 ..., m'_{1-4} schneiden. Die Abschnitte $a_1 m'_1$, $a_2 m'_2$, $a_3 m'_3$, ..., $a_{1-4} m'_{1-4}$ auf jenen Parallelen sind dann die reducirten Momente der Kräfte P_1, P_2, P_3 ... und der Resultante P_{1-4} der Grösse und dem Vorzeichen nach. Dem Vorzeichen nach, indem die Abschnitte $a_1 m_1'$, $a_3 m'_3$ und $a_{1-4} m'_{1-4}$, deren Sinn demjenigen der Parallelen, auf welchen sie liegen, entgegengesetzt ist, Kräften mit negativer (linksseitiger) Drehrichtung angehören, während die Abschnitte $a_2 m'_2$, $a_4 m'_4$ mit gleichem Sinn wie die Parallelen, auf denen sie liegen, Kräften zugehören, deren Drehrichtung um den Punkt O positiv (rechtsseitig) ist.

---

*) Für die Resultante kann man α, den Schnittpunkt der äussersten alten Seil-Polygonseiten, durch den sie ja hindurchgehen muss, zugleich als Schnittpunkt der vorangehenden äussersten Polygonseite mit ihr auffassen, oder man kann sich auf den Satz in §. 29 beziehen. Das letztere ist natürlich auch bei den einzelnen Kräften zulässig.

§. 47. Die reducirten Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene. — Wir haben bereits darauf aufmerksam gemacht, dass das in §. 45 kennen gelernte Verfahren zur Aufsuchung der Drehungsmomente eine besondere Einfachheit und desshalb Wichtigkeit bei parallelen Kräften in einer Ebene erhält. Dies ist zunächst desshalb der Fall, weil für solche das Kräftepolygon mit allen seinen Seiten und Diagonalen in eine gerade Linie, Kräftelinie, genannt, fällt, und folglich der Pol von allen diesen gleiche Entfernung hat. Nimmt man also diese Entfernung gleich der Momentenbasis, so erhält man alle Momente auf diese reducirt. Die Abschnitte, welche die betr. Seilpolygonseiten auf den durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen machen, sind sofort die reducirten Momente. Noch mehr: jene Parallelen fallen selbst alle in eine gerade Linie zusammen, auf welcher also sämmtliche Momente abgeschnitten werden, und zwar, wie sehr leicht zu sehen, in der Weise, dass der einer folgenden Kraft zugehörige Abschnitt mit seinem Anfangspunkt a unmittelbar an den Endpunkt m des Abschnittes der vorhergehenden Kraft angereiht ist. Da hiernach unserer in §. 45 gewählten allgemeinen Bezeichnung gemäss an jeden solchen Zwischenpunkt zwei Buchstaben, a und m, mit ihren betreffenden Zeigern zu schreiben wären, so wollen wir für den vorliegenden Fall paralleler Kräfte die Bezeichnung etwas ändern. Wir schreiben an den Anfangspunkt des Abschnitts für die erste Kraft m_0, an den Endpunkt m_1, ferner an den Endpunkt des sich hieran reihenden Abschnittes für die zweite Kraft m_2 u. s. w. f.

In der durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen sind endlich die Momentenabschnitte nicht blos ihrer Grösse und Richtung, sondern auch ihrem Sinne, ihrem Vorzeichen nach aneinander gereiht: Abschnitte mit gleichem Sinne gehören Kräften mit gleicher Drehrichtung und Abschnitte mit entgegengesetztem Sinne Kräften mit entgegengesetzter Drehrichtung an, ganz ohne Rücksicht auf den Sinn der Kräfte selbst, denen sie angehören und der durch den Momentenpunkt zu ihnen gezogenen Parallelen. Dies ist leicht zu beweisen. Denkt man sich den Sinn einer Kraft, ohne ihre Grösse, Richtung und Lage zu ändern, einfach umgekehrt, so wird ihre Drehrichtung die entgegengesetzte, ohne dass sich die absolute Grösse ihres Drehungsmomentes ändert. Mit dem Sinn der Kraft wird aber zugleich der Sinn der ihr entsprechenden Kräftepolygonseite, mithin die Seite derselben, auf welcher der Pol liegt, ferner der Sinn der durch den Momentenpunkt zu dieser Kraft gezogenen Parallelen und endlich der Sinn des Abschnittes, nicht aber dessen Grösse geändert. Wegen der letzteren beiden, gleichzeitig stattfindenden Aenderungen bleibt das Vorzeichen des Abschnittes ungeändert, aber das des Momentes kehrt sich um, weil die Seite, auf welcher der Pol des Kräftepolygons von der betr. Seite desselben liegt, die entgegengesetzte geworden ist. Die Umkehrung des Sinnes des Abschnitts gibt also doch diejenige des Vorzeichens des Drehungsmomentes zu erkennen. Wenn man aber, ohne die Grösse, Richtung und den Sinn einer Kraft zu ändern, dieselbe einfach von einer Seite des Momentenpunktes auf die andere legt, so ändert sich gleichfalls das Vorzeichen des Drehungsmomentes desselben, während von allen hier zu beachtenden, oben näher bezeichneten Linien blos der Sinn des Abschnitts entgegengesetzt wird und dadurch eben wieder die Aenderung der Drehrichtung zu erkennen gibt.

Auf der durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen werden also die Abschnitte, welche die reducirten Momente der Kräfte geben, auf graphischem Wege algebraisch zu einander addirt, ganz so wie in §. 8 die Kräfte, welche in einer und derselben geraden Linie in verschiedenem Sinne thätig sind. Nach dem allgemeinen Satz in §. 42 ist folglich das reducirte Moment der Resultante einer Anzahl aufeinanderfolgender parallelen Kräfte gleich der

Strecke vom Anfangspunkt des betr. Abschnittes der ersten Kraft bis zum Endpunkt des Abschnitts der letzten Kraft, und zwar der Grösse und dem Vorzeichen nach. Jene Strecke ist aber nichts anderes, als der Abschnitt zwischen den äussersten den Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten. Daraus folgt also der Satz: Das reducirte Drehungsmoment der Resultante paralleler Kräfte oder das Gesammt-Drehungsmoment derselben um irgend einen Punkt ihrer Ebene ist gleich dem Abschnitt zwischen den äussersten Seilpolygonseiten, die diesen Kräften zugehören, auf einer durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen. Dieser Satz behält nach §. 45 seine Anwendbarkeit auch für den Fall, dass das Kräftepolygon sich schliessen sollte.

Ein Beispiel möge diese Betrachtungen noch klarer machen. In Fig. 44, Taf. VI seien vier parallele, zum Theil gleich — zum Theil entgegengesetzt gerichtete, in der Ebene unseres Zeichnungsblattes gelegene Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben. In Fig. 44a) ist das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 daraus gezeichnet, das in eine gerade Linie, die Kräftelinie, fällt. In einer Entfernung gleich der Momentenbasis von derselben wurde der Pol C angenommen und für denselben in Fig. 44b) das Seilpolygon 0 I II III IV V gezeichnet. Auf der durch den Momentenpunkt O zu den Kräften gezogenen Parallelen OM werden sämmtliche reducirte Momente abgeschnitten, nämlich $m_0 m_1$ für die Kraft P_1, $m_1 m_2$ für die Kraft P_2, $m_2 m_3$ für die Kraft P_3, $m_3 m_4$ für die Kraft P_4. Die beiden nach aufwärts gerichteten Abschnitte $m_0 m_1$ und $m_3 m_4$ gehören Kräften von der einen (linksseitigen oder negativen), die nach abwärts gerichteten Abschnitte $m_1 m_2$, $m_2 m_3$ dagegen Kräften von der entgegengesetzten (rechtsseitigen oder positiven) Drehrichtung an. Die Abschnitte sind, wie es für die graphische Addition nothwendig ist, aneinander gereiht; ihre algebraische Summe $m_0 m_4$, der Abschnitt zwischen den äussersten Polygonseiten 0 I und IV V, gibt folglich das Drehungsmoment der Resultante der Grösse und dem Vorzeichen nach. Die Drehrichtung derselben ist linksseitig.

§. 48. Beispiel: Horizontaler, auf zwei Unterstützungspunkten frei aufliegender, prismatischer Träger (Balken). Als weiteres Beispiel für die vorhergehenden Lehren in Bezug auf parallele Kräfte in einer Ebene behandeln wir in Fig. 45, Taf. VI einen der Fälle, wie sie in der Praxis ungemein häufig vorkommen.

Ein horizontaler, prismatischer Balken liege frei auf zwei Stützpunkten A und B und werde von vertikal abwärts wirkenden Kräften oder Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 angegriffen, welche sämmtlich in der durch seine Schwerpunktsaxe gehenden Vertikalebene liegen, die wir als Zeichnungsebene genommen haben. Diese Kräfte seien in Fig. 45a) in das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 zuzusammengetragen. In einer Entfernung gleich der Momentenbasis von der Kräftelinie 0 4 sei der Pol C angenommen und für denselben das Seilpolygon 0 I II III IV V gezeichnet. Durch den Durchschnittspunkt a der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und IV V geht die Resultante der vier Kräfte hindurch, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Strecke 0 4 dargestellt ist. Zerlegt man diese Resultante in zwei, ebenfalls vertikal abwärts wirkende Componenten, die in den Linien liegen, welche durch die Stützpunkte A und B hindurch gehen, so sind diese Componenten die Einwirkungen, welche der Balken auf die Unterstützungspunkte ausübt. Sie sind leicht zu erhalten. Man verbindet die Punkte 0 und V, in welchen die äussersten Seilpolygonseiten die durch A und B gezogenen Vertikallinien schneiden, miteinander und zieht durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele zu dieser Verbindungslinie, bis die Kräftelinie in T geschnitten wird. Die Abschnitte 0T und T4, in welche dieser Punkt die Resultante 0 4 theilt, stellen der Grösse, Richtung und dem Sinne nach die gesuchten Componenten derselben, folglich die Ein-

wirkungen auf die Unterstützungspunkte dar. Bringt man diese Einwirkungen in gerade entgegengesetzter Richtung an dem Balken in den Punkten an, wo er die Unterstützungspunkte berührt, so stellen diese Kräfte die Gegenwirkungen vor, welche der Balken von Seite der Stützpunkte erfährt, die sog. Auflagerreaktionen, die wir mit A und B bezeichnen, und deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Abschnitte T0 und 4T gegeben ist. Der Balken befindet sich dann unter dem Einfluss der sechs Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_4, B im sogenannten freien Gleichgewicht, und in der That schliesst sich sowohl das Kräftepolygon T 0 1 2 3 4 T als auch das Seilpolygon 0 I II III IV V 0 aus jenen sechs Kräften.

Für die Anwendung der Sätze aus der Elasticitäts- und Festigkeitslehre auf den Balken ist es von Wichtigkeit, für jedes der beiden Stücke Ay und yB, in welche irgend ein Querschnitt y den Balken zerlegt, erstens die Resultante der sämmtlichen auf dasselbe einwirkenden Kräfte (einschliesslich der Auflagerreaktionen) und zweitens das Gesammtdrehungsmoment oder die algebraische Summe der Drehungsmomente jener Kräfte in Bezug auf den Schwerpunkt O des Querschnitts zu finden.

Lässt man die Kräfte in der Ordnung A, P_1, P_2, P_3, P_4, B aufeinander folgen und hat man im Auge, dass V0 sowohl die der ersten Kraft A vorangehende, als auch die der letzten Kraft B nachfolgende Seilpolygonseite ist, so ergibt sich sofort, dass die Resultante der auf den links liegenden Theil Ay des Balkens wirkenden Kräfte, im Falle unserer Figur der Kräfte A, P_1, P_2, P_3, der Grösse, Richtung und dem Sinne nach durch die Strecke T3 vorgestellt ist und durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten 0V und III IV hindurchgeht. Wären diese letzteren parallel, so wäre die Strecke T3 Null, weil die Linie CT mit dem Strahl C3 zusammengefallen wäre; und die Zusammensetzung der Kräfte A, P_1, P_2, P_3 würde ein Gegenpaar ergeben, dessen Drehungsmoment wir sogleich kennen lernen werden. Die Resultante der auf das rechts gelegene Stück yB wirkenden Kräfte P_4 und B ist durch die Strecke 3T repräsentirt und geht gleichfalls durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten III IV und 0V hindurch; sie ist also der vorigen gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt, wie sich von vornherein schon von selbst versteht.

Die reducirten Momente werden auf der durch den Momentenpunkt O gezogenen Vertikallinie abgeschnitten. Sie sind für die Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_4, B beziehungsweise durch die Abschnitte $M_0 m_0$, $m_0 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$, $m_4 M_0$ der Grösse und dem Vorzeichen nach vorgestellt. Die Kräfte A und P_4, deren Abschnitte $M_0 m_0$ und $m_3 m_4$ abwärts gerichtet sind, haben rechtsseitige, alle anderen linksseitige Drehrichtung. Die algebraische Summe der Drehungsmomente der auf das linke Stück Ay wirkenden Kräfte ist $M_0 m_3$, die der Kräfte, welche auf das rechte Stück yB einwirken, gleich $m_3 M_0$, dem vorigen gleich, aber gerade entgegengesetzt, wie ebenfalls wieder von selbst verständlich, da alle auf den Balken einwirkenden Kräfte im freien Gleichgewicht sind. $M_0 m_3$ oder $m_3 M_0$ ist zugleich der Abschnitt, welcher zwischen den äussersten Seilpolygonseiten V0 und III IV oder III IV und V0 liegt, und da die Schlusslinie V0 allemal entweder die äusserste erste oder äusserste letzte Seilpolygonseite ist, welche den auf eines der Stücke Ay oder yB einwirkenden Kräften zugehört, so folgt daraus der Satz:

Für jeden Querschnitt y des Balkens ist der Abschnitt der durch ihn hindurch gehenden Vertikallinie, welcher zwischen der Schlusslinie 0V und dem Polygonumfang 0 I II III IV V liegt, das reducirte Gesammt-Drehungsmoment sämmtlicher, auf der einen oder auf der anderen Seite des Querschnitts gelegenen äusseren Kräfte, die an dem Balken thätig sind. Werden diese Kräfte in der Ordnung von links nach rechts gezählt, so ist für die Kräfte links von jenem Quer-

schnitt der Abschnitt in der Richtung von der Schlusslinie 0V zum Polygon-Umfang zu nehmen für die andere Seite des Querschnitts aber in der entgegengesetzten. Liegt dabei der Pol des Kräftepolygons, wie in unserer Figur, links von der Kräftelinie 0 4 der vertikal abwärts gerichteten Kräfte, so gehören Momentenabschnitte mit nach abwärts gerichtetem Sinne Kräften mit positiver oder rechtsseitiger Drehrichtung an.

Daraus folgt noch sehr einfach, dass man für denjenigen Querschnitt das absolut grösste Gesammt-Drehungsmoment der links oder rechts von ihm gelegenen äusseren Kräfte erhält, für welchen die durch ihn hindurch gelegte Vertikallinie den Polygon-Umfang in dem Punkte trifft, wo er von einer zur Schlusslinie 0V parallel gezogenen Geraden berührt wird. In unserer Figur ist dies für den Querschnitt y_m der Fall. Man nennt diesen Querschnitt den gefährlichen, und zwar, wie sofort einleuchtet, aus dem Grunde, weil an dieser Stelle das Bestreben der auf den Balken einwirkenden Kräfte, ihn abzubrechen, am grössten ist. Für denselben Querschnitt ist, wie aus Obigem unmittelbar hervorgeht, die Summe der ausser ihm wirkenden Kräfte Null, vorausgesetzt, dass man die Kraft P_3, die in ihm selbst wirkt, so auf seine beiden Seiten vertheilt, wie sie durch den Punkt T im Kräftepolygon zerlegt wird. Jene Kräfte bilden also, wie schon weiter oben gesagt, ein Gegenpaar, dessen Drehungsmoment nun bekannt ist.

§. 49. Anwendung der Drehungsmomente zur Bestimmung der Spannungen in den Construktionstheilen eines eisernen Dachstuhles (Fachwerkträgers). — Als drittes Beispiel für die Anwendung der in §. 47 gegebenen Sätze über die Drehungsmomente paralleler Kräfte wählen wir die Aufgabe, die Spannungen in den Construktionstheilen eines Fachwerkträgers, und zwar desselben in Fig. 32, Taf. V gezeichneten, den wir schon in §. 34 behandelt haben, zu finden. Dort, in §. 34, dachten wir uns die Spannungen in den von einem Querschnitt getroffenen Construktionstheilen als Einwirkungen des abgeschnittenen Trägertheils auf den andern und fanden sie dann durch Zerlegung der Resultante der auf jenen Trägertheil wirkenden äusseren Kräfte in Componenten, deren Richtung und Lage vorgeschrieben war. Jetzt wollen wir jene Spannungen umgekehrt auffassen, als Einwirkungen des übrig bleibenden Trägertheils auf den abgeschnittenen; dann müssen sie mit den an letzterem thätigen äusseren Kräften im Gleichgewicht sein. Nach dem Satz in §. 44 muss folglich die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente um irgend einen Punkt in der Ebene des Trägers gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein dem Gesammtdrehungsmomente jener äusseren Kräfte um denselben Punkt. Zu den auf den Träger wirkenden äusseren Kräften sind natürlich auch die Auflagerreaktionen zu rechnen. Man wird desshalb, wie in Fig. 32 bereits geschehen, aus den gegebenen vertikal abwärts wirkenden Kräften oder Lasten P_1, P_2 ...... P_9 das Kräfte- und Seilpolygon, soweit es nöthig ist, construiren, die Gesammtresultante jener Kräfte dann in zwei, mit ihr parallele, durch die Unterstützpunkte gehende Componenten, die Auflagerdrücke zerlegen, und letztere, entgegengesetzt genommen, als Auflagerreaktionen P_0 und P_0' den äusseren Kräften hinzufügen, wodurch sich das Kräftepolygon sowohl, als auch das Seilpolygon schliesst. In letzterem kann dann für jeden Momentenpunkt in der bekannten Weise die algebraische Summe der Drehungsmomente einer Anzahl aufeinanderfolgender Kräfte, und zwar reducirt auf die Momentenbasis, sofort abgegriffen werden, vorausgesetzt, dass die Entfernung 𝔄C des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie gleich der Momentenbasis gewählt wurde.

In Fig. 32 ist diese Entfernung, auf dem dort zu Grunde gelegten Kräftemassstab ($0{,}01^m = 4000^k$) gemessen, gleich 20000^k. Misst man folglich die auf diese Basis reducirten Momentenabschnitte auf dem Längenmassstab ($0{,}005^m = 1^m$), so repräsentirt jeder Meter 20000 Meter-Kilo-

gramm. Der Massstab für die reducirten Momente ist also $0{,}005^m = 20000^{mk}$ oder $0{,}01^m =$ 40000 Meter-Kilogramm (§. 37).

Wie schon in §. 34 bemerkt, kann jeder Construktionstheil unseres Trägers durch einen Schnitt getroffen werden, der ausser ihn nur noch zwei Construktionstheile durchschneidet. Wählt man also den Durchschnittspunkt von zweien der drei Construktionstheile, welche durch einen solchen Querschnitt getroffen werden, als Momentenpunkt, so sind die Drehungsmomente der Spannungen derselben Null, und es bleibt nur noch das Drehungsmoment der Spannung des dritten Construktionstheils, von dem vorausgesetzt wird, dass er nicht auch durch jenen Momentenpunkt geht. Dieses Drehungsmoment muss folglich dem der äusseren Kräfte, welche auf das abgeschnittene Trägerstück wirken, gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein. Es ist also bekannt; ebenso der Hebelarm der Spannung, welcher es angehört, und desshalb kann letztere durch Division mit diesem Hebelarm in jenes Gesammtmoment der äusseren Kräfte der Grösse nach gefunden werden. Ihr Sinn ergibt sich aus dem Vorzeichen der Momente. Dies ist, auf vorliegendem Fall angewendet, das Verfahren, wie es zuerst Ritter in consequent ausgebildeter Weise zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerksystem angewendet hat. Es ist, wie aus Obigem hervorgeht, in den Fällen, wo ein Schnitt blos drei Construktionstheile trifft, auch graphisch sehr leicht durchführbar.

Sei yy in Fig. 32b) ein solcher Schnitt, durch den blos die drei Construktionstheile ce, de, df getroffen werden, und wählen wir zunächst den Durchschnittspunkt e der beiden ersten als Momentenpunkt. Dann repräsentirt der Abschnitt f IV auf der durch diesen Punkt gezogenen Vertikallinie das reducirte Moment der äusseren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3, welche auf das durch den Schnitt yy abgetrennte linke Trägerstück wirken. Denn BA ist die jenen Kräften vorangehende, III IV die ihnen nachfolgende äusserste Seilpolygonseite. Der Abschnitt f IV misst, auf jenem Momentenmassstab gemessen, 120000^{mk} ($3{,}00^{cm}$). So gross muss folglich das Drehungsmoment der Spannung in df sein. Da nun deren Hebelarm $ef = 4{,}8^m$ ist, so muss sie selbst $= \frac{120000}{4{,}8} = 25000^k$ betragen. Bei der in Fig. 32a) gewählten Lage des Pols im Kräftepolygon sind abwärts gerichtete Momentenabschnitte positiv, d. h. die zugehörigen Kräfte haben zusammen eine rechtsseitige Drehrichtung. Das durch den Abschnitt f IV repräsentirte Moment ist also positiv, und folglich hat die Spannung in df als Einwirkung des übrig gebliebenen Trägertheils auf den abgeschnittenen aufgefasst, negative Drehrichtung um e. Ihr Sinn muss folglich der durch den kleinen Pfeil in df angezeigte sein, oder sie ist eine Zugspannung.

Nimmt man ebenso den Durchschnittspunkt d der beiden Construktionstheile de und df als Momentenpunkt, so ist $d\,III = +\ 97200^{mk}$ das Moment der auf den abgeschnittenen Trägertheil wirkenden äusseren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3 und an Grösse gleich dem Moment der Spannung in ce um den Punkt d. Der Hebelarm dieser letzteren ist aber gleich $dq = 3^m$, folglich ist sie selbst gleich $\frac{97200}{3} = 32400^k$. Ihre Drehrichtung um d muss negativ, also ihr Sinn der des kleinen Pfeils in ce sein; sie ist eine Druckspannung.

Wählt man endlich den Durchschnittspunkt A der Construktionstheile ce und df als Momentenpunkt, so repräsentirt der Abschnitt $As = +\ 48000^{mk}$ das Gesammtdrehungsmoment der äusseren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3. Das Drehungsmoment der Spannung in de um den Punkt A muss folglich gleich $-\ 48000^{mk}$ sein, und da ihr Hebelarm $Au = 6{,}14^m$ ist, so folgt für ihre

absolute Grösse $\frac{48000}{6,14} = 7820^k$. Ihre Drehrichtung ist negativ, folglich ihr Sinn der durch den kleinen Pfeil in de angedeutete; sie ist also Zugspannung.

In ähnlicher Weise lässt sich dieses Verfahren zur Aufsuchung der Spannungen in allen übrigen Construktionstheilen unseres Trägers anwenden. Es ist auch leicht, es für die Fälle zu modifiziren, wo nicht mehr alle Construktionstheile durch Schnitte erreicht werden können, die blos drei solcher Theile durchschneiden, wo aber doch die Reihenfolge bei der Bestimmung der Spannungen so gewählt werden kann, dass stets nur in dreien der durch einen Schnitt getroffenen Construktionstheilen die Spannungen unbekannt sind.

VI. Abschnitt.

Kräfte im Raume.

§. 50. Drehungsmomente von Kräften im Raume um eine sie kreuzende Axe. — Die Definition, welche wir zu Anfang des vorigen Abschnitts vom Drehungsmomente einer Kraft um einen Punkt gegeben haben, braucht nicht auf Kräfte, die alle in einer Ebene liegen, wie wir sie im vorigen Abschnitt ausschliesslich behandelt haben, beschränkt zu werden. Jede beliebige Kraft im Raum sucht die Ebene, welche durch sie und einen beliebigen ausser ihr gelegenen Punkt bestimmt ist, um den letzteren zu drehen, und man nennt das Produkt aus der Kraft in ihre senkrechte Entfernung vom Drehungspunkt, oder den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die Kraft und dessen Spitze der Drehungspunkt ist, das Drehungsmoment der Kraft um den Punkt. Man kann sich dabei auch vorstellen, wie wir das in der Folge auch immer thun wollen, dass die Drehung der Ebene, insofern sie überhaupt eintritt, um eine Axe erfolge, welche in dem Drehungspunkte senkrecht auf ihr steht, die also auch mit der Kraft, sie kreuzend, einen rechten Winkel bildet. Aber es ist klar, dass eine Kraft im Raum nicht blos um eine sie rechtwinkelig kreuzende Axe eine Drehwirkung auszuüben vermag, sondern um jede, irgend einen Winkel mit ihr bildende, und dass nur eine solche Kraft, die mit der Drehungsaxe in einer Ebene liegt, sei es, dass sie dieselbe schneidet, oder dass sie mit ihr parallel ist, eine Drehung um diese Axe nicht hervorbringen kann.

Es ist leicht, die Drehwirkung einer Kraft, welche eine gegebene Drehungsaxe unter irgend einem schiefen Winkel kreuzt, auf die einer Kraft zurückzuführen, welche mit der Drehungsaxe einen rechten Winkel bildet, also auf das uns bereits geläufige Drehungsmoment um einen Punkt. Sei OO' (Fig. 46, Taf. VII) eine gegebene Drehungsaxe und $A_1 P_1$ eine sie unter beliebigem Winkel kreuzende Kraft. Letztere können wir mittelst des Kräfteparallelogramms in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine, $A_1 Q_1$, parallel zur Drehungsaxe ist, während die zweite, $A_1 T_1$, in der durch $A_1 Q_1$ und die gegebene Kraft bestimmten Ebene liegend, senkrecht auf der ersten Componente und somit auch senkrecht auf der Drehungsaxe steht. Erstere Componente kann keine Drehwirkung um die Axe OO' ausüben. Die Drehwirkung der letzteren um dieselbe Axe stimmt aber überein mit derjenigen, welche sie um den Punkt O'' dieser Axe ausübt, vorausgesetzt, dass dies der Durchschnittspunkt einer durch die Componente $A_1 T_1$ senkrecht auf die Drehungsaxe OO' gelegten Ebene mit der Drehungsaxe ist. Nun misst der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1 T_1 O''$ das Drehungsmoment der Componente $A_1 T_1$ um jenen Punkt O'' oder, unserer neuen Auffassung zufolge, um die Axe OO', und da die Componente $A_1 Q_1$ keine Drehwirkung ausüben kann, so sind wir berechtigt, mit jenem doppelten Flächeninhalt zugleich das Drehungsmoment der Kraft P_1 um die Axe OO' zu messen. Berücksichtigt man noch, dass

die Componente $A_1 T_1$ auch als Projektion $A'_1 P'_1$ der Kraft P_1 auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene EE aufgefasst werden kann, und dass das Dreieck $A_1 T_1 O''$ gleich dem Dreieck $A'_1 P'_1 O'$ ist, welches jene Projektion als Grundlinie und den Durchschnittspunkt O' der Drehungsaxe mit der Ebene EE zur Spitze hat, so folgt hieraus die Definition:

Das Drehungsmoment einer beliebigen Kraft im Raum um eine beliebige, sie kreuzende Axe ist gleich dem Drehungsmoment der Projektion dieser Kraft auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene um den Punkt dieser Ebene, in welchem sie von der Drehungsaxe geschnitten wird, also gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches jene Projektion zur Grundlinie und den Durchschnittspunkt zur Spitze hat. In dem Falle, wo die Kraft mit der Drehungsaxe in einer Ebene liegt, wird entweder ihre Projektion auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene ein Punkt, nämlich dann, wenn die Kraft parallel zur Drehungsaxe ist, oder jene Projektion geht durch den Durchschnittspunkt der Drehungsaxe mit der Projektionsebene hindurch. In beiden Fällen wird das oben definirte Drehungsmoment um die Drehungsaxe gleich Null.

Denkt man sich nun mehrere beliebige Kräfte P_1, P_2, P_3 ... im Raum, welche alle um die Axe OO' zu drehen suchen, so sind ihre Drehungsmomente alle gleich denen ihrer Projektionen auf eine zur Axe senkrechten Ebene um den Durchschnittspunkt der Axe mit der Projektionsebene. Diese letzteren Drehungsmomente summiren sich nach den Sätzen des vorigen Abschnittes einfach ihrem Vorzeichen nach zueinander, und die Summe ist gleich dem Drehungsmomente der Resultante oder des Gegenpaars, welche durch die Vereinigung der Projektionen der Kräfte in der Projektions-Ebene erhalten werden. Diese Summe kann folglich auf einem der im vorigen Abschnitt angegebenen Wege durch Construktion gefunden werden. Sie drückt offenbar das Gesammtdrehungsmoment der gegebenen Kräfte im Raum um die gegebene Drehungsaxe aus.

§. 51. Momentenaxen von Kräften, Resultantenaxe, Axenpolygon. — Das Dreieck $A'_1 P'_1 O'$ (Fig. 46, Taf. VII), dessen doppelter Flächeninhalt gleich dem Drehungsmoment der Kraft P_1 im Raum um die Axe OO' ist, kann auch als Projecktion des Dreiecks $A_1 P_1 O$ aufgefasst werden, das die Kraft P_1 zur Grundlinie und einen beliebigen Punkt O in der Drehungsaxe als Spitze hat. Dieses letztere Dreieck repräsentirt aber mit seinem doppelten Flächeninhalt das Drehungsmoment der Kraft P_1 um den Punkt O oder um die Axe OM, welche in dem Punkte O auf der Ebene $A_1 P_1 O$ senkrecht steht. Man erhält folglich aus dem durch ein Dreieck repräsentirten Drehungsmoment einer Kraft um einen beliebigen Punkt dasjenige derselben Kraft um irgend eine durch diesen Punkt gelegte Axe, wenn man ersteres auf eine Ebene, welche senkrecht zu letzterer Axe steht, projicirt.

Nun erleichtern wir uns die graphischen Operationen mit den Momenten bekanntlich wesentlich dadurch, dass wir sie in Linien ausdrücken, indem wir sie auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reduciren. Dieses reducirte Moment denken wir uns jetzt in dem Fall, wo es sich um das Drehungsmoment einer Kraft $A_1 P_1$ um einen Punkt O handelt, von letzterem Punkte aus auf die Senkrechte aufgetragen, welche in ihm auf der Drehungsebene $A_1 P_1 O$ errichtet werden kann; und um zugleich dem Vorzeichen der Momente, also der Drehrichtung, Rechnung zu tragen, kommen wir überein, jene Senkrechte stets nach der Seite der Drehungsebene hin zu errichten, von welcher aus gesehen die Drehrichtung der Kraft als positiv, also als übereinstimmend mit der des Zeigers einer Uhr erscheint. In Uebereinstimmung damit und mit der oben gegebenen Definition tragen wir das reducirte Drehungsmoment einer Kraft um eine beliebige Axe auf diese letztere in solchem Sinne auf, dass, in entgegengesetzter Richtung auf eine zur Axe senkrechte

Ebene hin gesehen, die Drehung dieser um die Axe rechtsseitig wie vorhin erscheint. Diese auf die Drehungsaxe aufgetragenen reducirten Momente nennt man Momentenaxen, in dem einen sowohl wie in dem anderen Fall. Durch dieselben werden die Drehungsmomente ihrer Grösse und Richtung nach vollständig bestimmt. Berücksichtigt man, dass in Fig. 46, Taf. VII die auf obige Weise errichtete Axe O M des Momentes der Kraft P_1 um den Punkt O denselben Winkel mit der Drehungsaxe O O′ bildet, wie die Ebene des Dreiecks $A_1 P_1 O$ mit der Projektionsebene E E, so folgt nach der oben ausgesprochenen Beziehung zwischen den beiden Dreiecken $A_1 P_1 O$ und $A'_1 P'_1 O'$ der Satz:

Man erhält aus dem Drehungsmomente einer Kraft um einen Punkt dasjenige derselben Kraft um irgend eine durch den Punkt gelegte Axe, wenn man die Axe des ersteren Momentes auf die Drehungsaxe projicirt. Die Projektion ist die Axe des Moments der Kraft um die Drehungsaxe und bestimmt also dasselbe vollständig.

Denken wir uns jetzt wieder mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ im Raum und einen willkürlichen Punkt O, so sind die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke $A_1 P_1 O$, $A_2 P_2 O \ldots$ die Drehungsmomente dieser Kräfte um den Punkt O. Wir errichten dann auf all' diesen Dreiecksflächen in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkt O Senkrechte stets nach derjenigen Seite der betreffenden Ebene hin, von welcher aus die Drehrichtung der in dieser Ebene liegenden Kraft um den Punkt O als positiv erscheint, und tragen auf diese Senkrechten die reducirten Momente der betreffenden Kräfte um den Punkt O auf: wir construiren mit einem Worte die Momentenaxen jener Drehungsmomente. Wird dann irgend eine beliebige Drehungsaxe durch O gelegt, so erhält man die Axen der Drehungsmomente der Kräfte um dieselbe, wenn man die vorhin construirten Momentenaxen auf die Drehungsaxe projicirt. Die algebraische Summe dieser Projektionen gibt offenbar das Gesammtdrehungsmoment der Kräfte um die Drehungsaxe.

Diese algebraische Summe kann man auf die Art erhalten, wie am Ende des vorigen §. auseinander gesetzt. Man kann sie sich aber auch auf folgende Weise verschaffen. Denkt man sich die Axen der Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O von diesem letzteren aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach in beliebiger Ordnung so aneinander gereiht, dass sich jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden anschliesst, dann ist die Projektion der Schlusslinie, d. h. der Verbindungslinie des Anfangspunkts der ersten mit dem Endpunkte der letzten der so aneinander gereihten Axen auf jede durch den Punkt O gelegte Drehungsaxe gleich der algebraischen Summe der Projektionen der einzelnen Momentenaxen auf die Drehungsaxe. Jene Schlusslinie kann also offenbar als Axe des Momentes einer Kraft um den Punkt O betrachtet werden, welche um jede durch O gelegte Axe genau dieselbe Drehwirkung ausübt, wie die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ insgesammt. Desshalb heisst man diese Schlusslinie mit Recht die Resultantenaxe jener einzelnen, und aus dem Obigen geht hervor, dass sie aus diesen letzteren ganz ebenso durch Construktion eines Polygons, des „Axenpolygons", erhalten werden kann, wie wir in §. 10 aus Kräften, welche nach beliebigen Richtungen des Raumes hin an einem und demselben Angriffspunkt wirken, durch Construktion des Kräftepolygons die Resultante jener Kräfte fanden.

§. 52. Momentenaxen der Gegenpaare, Resultantenaxe und Resultanten-Gegenpaar. — Ein Gegenpaar hat um jeden Punkt der Ebene, in der es liegt, also auch um jede Axe, die auf seiner Ebene senkrecht steht, das nämliche Drehungsmoment, gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, das die eine seiner Kräfte zur Grundlinie hat, und dessen Spitze in der anderen

Kraft liegt. Es kann in seiner Ebene verlegt und dabei seine Kräfte und die Entfernung derselben, sein Arm, verändert werden, wie man will, wenn nur sein Drehungsmoment, also der Flächeninhalt jenes Dreiecks unverändert bleibt.

Wir können jetzt hinzufügen, dass ein Gegenpaar auch in eine parallele Ebene verlegt werden darf, ohne dass sich seine Wirkung ändert, ganz entsprechend seiner Auffassung als unendlich kleine Kraft, die in der unendlich fernen Geraden liegt, welche einer Schaar paralleler Ebenen gemeinschaftlich ist. — In der That, seien $P, -P$ (Fig. 47, Taf. VII) die beiden gleichen, parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte eines Gegenpaares, und verlegen wir dieselben, ohne vorläufig ihre Richtung und Grösse, also auch ihre Entfernung zu ändern, in eine parallele Ebene, nach $P', -P'$, so kann man sich irgend eine dritte, die beiden vorigen schneidende Ebene denken, welche die Linien, in denen die vier Kräfte $P, -P, P', -P'$ liegen, in den Punkten A, B, A', B' schneiden, die wir als Angriffspunkt jener vier Kräfte betrachten können. Diese vier Punkte bilden immer die Ecken eines Parallelogramms. Denkt man sich nun zwei, den Kräften $P', -P'$ beziehungsweise gleiche und in denselben geraden Linien entgegengesetzte Kräfte $P'', -P''$ mit den Angriffspunkten in B' und A', so bilden dieselben ein Gegenpaar, das dem $P', -P'$ offenbar das Gleichgewicht hält. Dasselbe lässt sich von den beiden Gegenpaaren $P'', -P''$ und $P, -P$ behaupten. In der That geben die beiden parallelen, gleichen und gleichgerichteten Kräfte P und P'', für sich zusammengesetzt, eine Resultante $P + P''$ gleich ihrer Summe, parallel mit ihnen und gleichgerichtet, welche durch den Halbirungspunkt C der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte hindurchgeht. Eine dieser gleiche, aber entgegengesetzte Resultante geben die beiden Kräfte $-P, -P''$, und da dieselbe durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie der beiden Punkte B und A' hindurchgehen muss, der mit dem vorigen Punkt C zusammenfällt, so halten sich beide Resultanten das Gleichgewicht und folglich auch die beiden Gegenpaare $P, -P$ und $P'', -P''$. Da nun von den beiden Kräften $P'', -P''$ sowohl dem Gegenpaar $P, -P$, als auch dem $P', -P'$ das Gleichgewicht gehalten wird, so haben letztere beide offenbar ganz gleiche Wirkung.

Denkt man sich in irgend einer der Lagen eines Gegenpaares, die es nach Obigem erhalten kann, einen Momentenpunkt in der einen seiner Kräfte angenommen, so ist das Drehungsmoment der anderen Kraft um diesen Punkt der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem des Gegenpaars. Es liegt also nahe, die Drehungsmomente der Gegenpaare ganz ebenso durch Momentenaxen darzustellen, wie diejenigen von Kräften um Drehungspunkte. Man errichtet zu diesem Zwecke in irgend einem Punkte der Ebene des Gegenpaares nach derjenigen Seite der Ebene hin, von welcher aus gesehen die Drehrichtung des Gegenpaares positiv erscheint, eine Senkrechte auf jener Ebene und trägt auf dieser vom Fusspunkte aus eine Strecke, gleich dem reducirten Moment des Gegenpaars, ab. Diese Strecke nennen wir die Momentenaxe oder schlechtweg Axe des Gegenpaars, und es ist klar, dass wegen der Veränderungen, die mit einem Gegenpaar vorgenommen werden können, diese Axe in jede beliebige Lage gebracht werden darf, wenn nur ihre Grösse, ihre Richtung und ihr Sinn die gleichen bleiben.

Wie aber eine Kraft nicht blos um eine, sie rechtwinkelig kreuzende Axe drehen kann, sondern um jede andere, die einen schiefen Winkel mit ihr bildet, so kann auch ein Gegenpaar um jede Axe drehen, wenn dieselbe nur nicht in seiner Ebene liegt oder parallel dazu ist. Es ist leicht, aus dem Drehungsmoment eines Gegenpaars nach bisheriger Definition, also für eine zu seiner Ebene senkrechte Drehungsaxe, das für eine andere Axe abzuleiten, die unter schiefem Winkel zu jener Ebene geneigt ist. Denkt man sich ein Gegenpaar $P, -P$ so verlegt, dass der Angriffspunkt der einen seiner Kräfte, etwa der Kraft $-P$, in irgend einen Punkt O der willkürlich

angenommenen Drehungsaxe fällt, so hat diese Kraft gar keine Drehwirkung um letztere und desshalb ist die Drehwirkung des Gegenpaars gleich derjenigen der anderen Kraft P um die Drehungsaxe. Wir können daher unter dem Drehungsmoment des Gegenpaars um die Drehungsaxe dasjenige der Kraft P um dieselbe Axe verstehen, welch' letzteres, bezw. seine Axe, erhalten wird, wenn man die Momentenaxe der Kraft für den Punkt O auf die Drehungsaxe projicirt. Aber das Drehungsmoment der Kraft P um den Punkt O ist nichts anderes, als das des Gegenpaars selbst, und daraus folgt: Man erhält das Drehungsmoment eines Gegenpaars um irgend eine willkürliche Drehungsaxe, wenn man seine Momentenaxe auf die letztere projicirt. Diese Projektion ist die Axe des gesuchten Drehungsmomentes, darunter wie bisher die auf die Drehungsaxe aufgetragene Strecke verstanden, welche der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem auf die Momentenbasis reducirten Drehungsmoment ist.

Hat man nun mehrere Gegenpaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, $(P_3, -P_3) \ldots$, welche in beliebigen Ebenen des Raumes liegen, so kann man dieselben so verlegen, dass alle ihre Ebenen und je die eine von den Kräften, aus denen sie bestehen, etwa die Kräfte $-P_1, -P_2, -P_3 \ldots$, durch den nämlichen willkürlichen Punkt O des Raumes gehen. Ebenso kann man ihre Axen parallel verlegen, bis ihre Anfangspunkte alle in den Punkt O zu liegen kommen, sie stehen dann in diesem Punkte senkrecht auf den Ebenen der verlegten Gegenpaare, denen sie angehören, und können auch als Axen der Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O angesehen werden. Denken wir uns irgend eine Drehungsaxe durch den letzteren Punkt gelegt, so ist die algebraische Summe der Projektionen jener Momentenaxen auf die Drehungsaxe gleich der algebraischen Summe der auf eine und dieselbe Basis reducirten Drehungsmomente von den in obiger Weise verlegten Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$, also der Gegenpaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2 - P_2)$, $(P_3, -P_3) \ldots$ um die Drehungsaxe.

Man kann aber offenbar jene algebraische Summe der Projektionen auch dadurch erhalten, dass man, wie oben aus den Axen der Kräfte, so jetzt aus den Momentenaxen der Gegenpaare ein Axenpolygon construirt und dessen Schlusslinie, d. h. die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten abgetragenen Axe auf die Drehungsaxe projicirt. Dies gilt so für alle durch den Punkt O möglichen Drehungsaxen. Desshalb kann man sich jene Schlusslinie auch als die Momentenaxe eines Gegenpaars vorstellen, das um jede durch den Punkt O gehende Drehungsaxe dasselbe Drehungsmoment hat, wie die gegebenen Gegenpaare zusammen. Man kann also mit Recht jene Schlusslinie wieder Resultantenaxe nennen. Das ihr zugehörige Gegenpaar heisst das Resultanten-Gegenpaar der gegebenen, und in der That kann leicht erwiesen werden, dass es diese vollständig in ihrer Wirkung ersetzen kann.

Um diesen Beweis zu führen, denken wir uns zunächst zwei Gegenpaare, welche in den beiden sich in der Linie AB schneidenden Ebenen JJ und KK (Fig. 48, Taf. VII) gelegen sind. Wir verlegen und verändern sie in diesen Ebenen so, dass sie eine beliebige Strecke AB jener Durchschnittslinie als Arm erhalten, auf welchem in den Endpunkten A und B die Kräfte P_1 und $-P_1$, P_2 und $-P_2$, in ihren betr. Ebenen liegend, senkrecht stehen. Dann liegen die Kräfte P_1 und P_2 sowohl, als auch die Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ je in einer Ebene, die in dem Punkte A, bezw. B, senkrecht auf der Schnittlinie AB steht. Die aus den Kräften P_1 und P_2 vermittelst des Kräfteparallelogramms construirte Resultante R ist offenbar gleich und parallel, aber entgegengesetzt der Resultante $-R$ aus den Kräften $-P_1$ und $-P_2$. Beide Resultanten bilden daher wieder ein Gegenpaar, dessen Wirkung diejenige der beiden gegebenen vollständig und überall ersetzen kann, und das daher das Resultantengegenpaar derselben genannt werden muss. Denken wir uns nun, es sei die Strecke

AB gleich der Momentenbasis genommen, und errichten wir in dem Punkte A Senkrechte auf den Ebenen JJ und KK nach derjenigen ihrer Seiten hin, von der aus die Drehrichtung der in ihnen gelegenen Gegenpaare als positiv erscheint, dann sind die auf diese Senkrechten aufzutragenden Axen AM_1 und AM_2 der Gegenpaare bezw. gleich den Kräften P_1 und P_2. Die Diagonale AN des über jenen Axen construirten Parellelogramms ist folglich gleich der Kraft R und steht senkrecht auf der durch die Kräfte R und — R bestimmten Ebene des Resultantengegenpaars. Sie ist folglich die Axe dieses letzteren. Für jede andere Momentenbasis erhält man Axen, die denen AM_1, AM_2 und AN proportional sind, und desshalb lässt sich, in Berücksichtigung der Veränderungen, die mit einem Gegenpaar vorgenommen werden können, folgender Satz aussprechen:

Wenn man die Axen irgend zweier Gegenpaare von einem beliebigen Punkte des Raumes aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach aufträgt und über den so erhaltenen Linien ein Parallelogramm construirt, so ist die von jenem Punkte ausgehende Diagonale desselben der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als Axe eines Gegenpaars zu betrachten, das, hiedurch vollkommen bestimmt, die gegebenen in ihrer Wirkung vollständig und überall ersetzen kann und desshalb Resultantengegenpaar genannt wird. Seine Axe heisst Resultantenaxe. Sie kann auch dadurch erhalten werden, dass man von einem beliebigen Punkt aus die Axen der gegebenen Gegenpaare ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hintereinander abträgt, die zweite mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten anschliessend, und dass man dann jenen Ausgangspunkt mit dem Endpunkte der zweiten Kraft verbindet.

Dieses letztere Verfahren lässt sich nun genau so wie bei den Kräften im Raume in §. 10 auf beliebig viele, in beliebigen Ebenen gelegene Gegenpaare ausdehnen. Man erhält die Axe des Resultantengegenpaars, wenn man aus den Axen der gegebenen in bekannter Weise ein Polygon im Raume construirt und darin den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkt der letzten Axe verbindet. Das dadurch bestimmte Gegenpaar kann die gegebenen vollständig ersetzen, und sein Drehungsmoment um jede Drehungsaxe ist nach Obigem gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der gegebenen Gegenpaare um dieselbe Axe.

In ganz ähnlicher Weise wie bei den Kräften kann natürlich auch die Zerlegung eines Gegenpaars in zwei oder mehrere Componentenpaare vorgenommen werden.

§. 53. Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Raume. — Mit Hülfe der obigen Sätze ist es nun leicht, beliebige Kräfte P_1, P_2, P_3 ... im Raum, deren Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 ... irgendwie gelegen sein mögen, miteinander zu vereinigen. Man nimmt willkürlich einen fixen Punkt O an, nach welchen man die gegebenen Kräfte mit ihren Angriffspunkten verlegt, indem man ihre Grösse, Richtung und ihren Sinn ungeändert lässt. Dann erhält man neben den verlegten, in O angreifenden Kräften ebensoviele Gegenpaare, die in den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O... liegen, deren Drehungsmomente durch den doppelten Flächeninhalt jener Dreiecke repräsentirt werden, und deren Drehrichtung der Kreispfeil angibt, der in jene Dreiecke gezeichnet werden kann und seinem Sinne nach mit der bezüglichen Kraft übereinstimmt. Die in O angreifenden Kräfte können mittelst des Kräftepolygons im Raum zu einer Resultante R vereinigt werden. Um ebenso die Gegenpaare zu vereinigen, denke man sich im Punkte O auf den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O... Senkrechte nach der Seite hin errichtet, von der aus gesehen die Drehrichtung der Gegenpaare oder der Kräfte P_1, P_2, P_3... um den Punkt O positiv wie die des Zeigers einer Uhr erscheint; auf diesen Senkrechten trage man die reducirten Momente der Gegenpaare oder der Kräfte P_1, P_2, P_3 ... um den Punkt O auf; man construire also mit einem Wort die Axen der Gegenpaare oder der Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O. Aus diesen Axen zeichnet man dann das

Axenpolygon. Die Schlusslinie desselben ist die Resultantenaxe U, welche das Gegenpaar vollständig bestimmt, das dieselbe Wirkung hat wie diejenigen, die man neben den nach O verlegten Kräften erhalten hatte, zusammengenommen. Jene Resultante R und dieses Gegenpaar oder diese Resultantenaxe U sind es also, auf welche die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 ... zurückgeführt werden können.

Bei der Ausführung dieser Construktionen sind natürlich die Kräfte P_1, P_2, P_3 ... durch ihre Risse auf zwei Tafeln zu geben. Aus diesen erhält man dann die Risse des Kräftepolygons der nach den Punkt O verlegten Kräfte, indem man von den Rissen dieses Punktes aus in jeder der beiden Tafeln die Polygone aus den Rissen der Kräfte construirt. Die Schlusslinien dieser Polygone sind die Risse der Resultante R, welche dadurch vollständig bestimmt ist. Um die Resultantenaxe U zu finden, kann man verschiedene Wege einschlagen.

a) Man kann die Projektionen derselben auf drei, durch den Punkt O gehende, nicht in einer Ebene liegende Drehungs-Axen aufsuchen, durch welche drei Projektionen sie vollständig bestimmt ist. Für jede dieser Drehungsaxen ist die Projektion der Resultantenaxe auf sie gleich der algebraischen Summe der Projektionen der Componentenaxen, also gleich der algebraischen Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfte P_1, P_2, P_3 ... um jene Drehungsaxe. Nimmt man also jene drei Axen bezw. senkrecht auf der ersten, zweiten und auf einer dritten Projektionstafel, welche senkrecht auf einer oder auf den beiden vorhergehenden steht, so ist die Projektion der Resultantenaxe auf jede dieser drei Axen gleich der algebraischen Summe der reducirten Drehungsmomente, welche die Risse der Kräfte auf derjenigen Tafel, auf der die betr. Axe senkrecht steht, um den Fusspunkt dieser Axe haben. Diese algebraischen Summen können also auf einem der in den Paragraphen 40 und 46 gezeigten Wege gefunden werden.

Wir haben diesen Gang in Fig. 49, Taf. VII befolgt, um beispielsweise die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 zu vereinigen, deren Risse $A_1'P_1'$, $A_2'P_2'$, $A_3'P_3'$, dann $A_1''P_1''$, $A_2''P_2''$, $A_3''P_3''$ in zwei aufeinander senkrecht stehenden Tafeln als gegeben vorausgesetzt werden. Die Polygone $0'\ 1'\ 2'\ 3'$, $0''\ 1''\ 2''\ 3''$, welche aus diesen Rissen von den Rissen $0'$ und $0''$ des beliebigen Punktes O aus construirt wurden, bestimmen durch ihre Schlusslinien $0'\ 3'$ und $0''\ 3''$ die Resultante R, deren Risse eben diese Schlusslinien sind.

Um die Resultantenaxe zu finden, hat man die algebraische Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfte-Projektionen in der ersten Tafel um den Punkt $0'$, derjenigen in der zweiten Tafel um den Punkt $0''$ aufzusuchen und in gleicher Weise in einer dritten Tafel zu verfahren, die wir senkrecht auf den beiden vorhergehenden annehmen, und für welche die Risse der Kräfte, nämlich $A_1'''\ P_1'''$, $A_2'''\ P_2'''$, $A_3'''\ P_3'''$, und der des Punktes O, nämlich $0'''$, aus den vorhandenen beiden Rissen leicht gefunden werden können. Den in §. 46 angegebenen Weg befolgend, nehmen wir in jedem der Polygone $0'\ 1'\ 2'\ 3'$ und $0''\ 1''\ 2''\ 3''$, sowie in dem in der dritten Tafel erst zu zeichnenden $0'''\ 1'''\ 2'''\ 3'''$ einen Pol C', bezw. C'' und C''' an, dessen Entfernung von der betreffenden Schlusslinie gleich der Momentenbasis ist. Für diese Pole construiren wir dann die Seilpolygone $0'\ I'\ II'\ III'\ IV'$, $0''\ I''\ II''\ III''\ IV''$, $0'''\ I'''\ II'''\ III'''\ IV'''$, deren äusserste Seiten auf den durch die Momentenpunkte $0'$, $0''$, $0'''$ gezogenen Parallelen zu den betreffenden Resultanten der Kräfte-Risse, also auf den Linien $0'3'$, $0''3''$, $0'''3'''$ selbst, Abschnitte $m_0'm_3'$, $m_0''m_3''$ $m_0'''\ m_3'''$ machen, welche gleich den reducirten Momenten jener Resultanten um die Punkte $0'$, $0''$, $0'''$ sind, oder gleich den algebraischen Summen der reducirten Drehungsmomente der Kräfte-Risse auf den drei Tafeln um jene Momentenpunkte. Die Vorzeichen dieser Summen bestimmen sich aus den Drehrichtungen der betr. Resultanten der Kräfte-Risse sehr leicht. Diese Resultanten sind ihrer

Grösse, Richtung und ihrem Sinn nach durch die Schlusslinien $0'3'$, $0''3''$, $0'''3'''$ repräsentirt und gehen durch den betr. Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten hindurch.

In einem Sinne, der jenem Vorzeichen entspricht, sind dann die Abschnitte $m_0'm_3'$, $m_0''m_3''$, $m_0'''m_3'''$ von dem Punkt O aus auf die drei Drehungsaxen aufzutragen, welche durch diesen Punkt gelegt wurden und auf den drei Tafeln senkrecht stehen. Die so aufgetragenen Abschnitte sind die Projektionen der Resultantenaxe U auf die drei Drehungsaxen und projiciren sich selbst wieder auf jede der drei Tafeln, auf der sie nicht senkrecht stehen, in ihrer wahren Grösse. Macht man also $0'U_3'$ und $0''U_3''$ beide gleich $m_0'''m_3'''$ (nach links aufgetragen, weil die dritte Tafel, von dieser Seite angesehen, von den in ihr liegenden Kräfte-Rissen oder deren Resultante in positivem Sinne gedreht wird), dann $0''U_1''$ gleich $m_0'm_3'$ (nach unten getragen, weil die erste Tafel, von oben gesehen, von den in ihr liegenden Kräfte-Rissen oder deren Resultante links gedreht wird), endlich $0'U_2'$ gleich $m_0''m_3''$ (nach hinten getragen, weil die zweite Tafel, von vorn gesehen, von den in ihr liegenden Kräfte-Rissen linksseitig gedreht wird), so sind die Diagonalen U' und U'' der Parallelogramme über den Stücken $0'U_2'$ und $0'U_3'$, bezw. $0''U_1''$ und $0''U_3''$ die Risse der gesuchten Resultantenaxe auf der ersten und zweiten Tafel. Diese Axe ist hierdurch völlig bestimmt.

b) Die zweite Methode, die Resultantenaxe U zu finden, besteht darin, dass man das Polygon aus den Axen der Gegenpaare oder der Drehungsmomente der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ um den Punkt O selbst construirt. Wir haben sie in Fig. 50, Taf. VIII bei der Vereinigung der nämlichen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, die wir schon in Fig. 49 Taf. VII behandelten, angewendet. Von diesen Kräften wurden wieder ihre Risse auf zwei Tafeln, nämlich $A_1'P_1'$, $A_2'P_2'$, $A_3'P_3'$, dann $A_1''P_1''$, $A_2''P_2''$, $A_3''P_3''$ als gegeben vorausgesetzt. Aus denselben sind die Risse $0'\ 1'\ 2'\ 3'$, $0''\ 1''\ 2''\ 3''$ des Kräftepolygons für die nach den Punkt O verlegten Kräfte wie oben construirt worden, und man hat auf diese Weise die Resultante R jener Kräfte, beziehungsweise ihre Risse R' und R'', gleich den Schlusslinien $0'\ 3'$ und $0''\ 3''$ gefunden.

Die Axen stehen senkrecht auf den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O, A_3P_3O. Zeichnet man also Linien, die in diesen Dreiecksebenen liegen, und deren zweite Risse parallel zur Projektionsaxe sind, so müssen senkrecht auf den ersten Rissen S_1', S_2', S_3' derselben die ersten Risse der Momentenaxen stehen. Die zweiten Risse derselben stehen ebenso senkrecht auf den zweiten Rissen T_1'', T_2'', T_3'' von Linien, die in jenen Dreiecksebenen liegen, und deren erste Risse parallel zur Projektionsaxe sind. Hierdurch sind die Richtungen der Momentenaxen völlig bestimmt. Um ihre Grösse zu erhalten, müsste man eigentlich die wahre Grösse der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O, A_3P_3O aufsuchen und auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reduciren. Diese etwas unbequeme Construktion kann man aber umgehen, wenn man den Satz benützt, dass die Projektion irgend einer der Momentenaxen auf eine, zur ersten Tafel z. B. senkrechte Drehungsaxe gleich ist der Axe des Drehungsmomentes des Risses der Kraft auf der ersten Tafel um den Fusspunkt jener Drehungsaxe. Legt man also die letztere durch den Punkt O senkrecht auf die erste Tafel, so ist $0'$ ihr Fusspunkt, und die Projektionen der Momentenaxen auf sie sind gleich den reducirten Momenten, welche durch die doppelten Dreiecksflächen $A_1'P_1'0'$, $A_2'P_2'0'$, $A_3'P_3'0'$ repräsentirt werden. Ebenso sind die Projektionen der Momentenaxen auf eine durch O senkrecht auf die zweite Tafel gelegte Drehungsaxe gleich den reducirten Momenten, die durch die doppelten Dreiecksflächen $A_1''P_1''0''$, $A_2''P_2''0''$, $A_3''P_3'0''$ dargestellt sind.

Die Reduktion der oben genannten Momente wurde in Fig. 50 auf die in Nr. 40 angegebene erste Methode vorgenommen, indem man die betreffenden Kräfte-Risse mit einem

Kreise um O' bezw. O'', dessen Radius gleich der Momentenbasis ist, durchschnitt etc. etc. Man erhielt so in der ersten Tafel die Stücke h_1', h_2', h_3', in der zweiten die Stücke h_1'', h_2'', h_3'' als reducirte Momente. Erstere drei Stücke sind aber nicht blos die Projektionen der Momentenaxen auf eine zur ersten Tafel senkrecht gelegte Drehungsaxe, sondern auch die Projektionen der zweiten Risse der Momentenaxen auf den zweiten Riss jener Drehungsaxe, also auf eine durch O'' gelegte Senkrechte zur Projektionsaxe. Aehnliches gilt für die Stücke h_1'', h_2'', h_3''. Hiernach lassen sich nun die Risse des vom Punkt O aus gezogenen Axenpolygons auf den beiden Tafeln leicht wie folgt construiren.

In der ersten Tafel trägt man von O' aus auf einer zur Projektionsaxe senkrechten Linie, oder besser, der grösseren Deutlichkeit wegen, auf einer seitwärts gezogenen Senkrechten zur Projektionsaxe von einem O' entsprechenden Punkt q_0' aus die reducirten Momente h_1'', h_2'', h_3' ihrer Grösse und ihrem Vorzeichen nach hintereinander ab. Man macht also $q_0' q_1'$ gleich h_1' und zwar nach rückwärts, weil die zweite Tafel, von vorn gesehen, von dem Kräfte-Riss $A_1'' P_1''$ im negativen Sinn um O'' zu drehen gesucht wird; $q_1' q_2'$ macht man gleich h_2'' und trägt es aus demselben Grunde nach rückwärts; endlich $q_2' q_3'$ ist gleich h_3' zu machen und vorwärts aufzutragen, weil die zweite Tafel, von vorne gesehen, von dem Kräfte-Riss $A_3'' P_3''$ im positiven Sinne gedreht wird. In der zweiten Tafel ist ähnlich $q_0'' q_1''$ gleich h_1' gemacht und abwärts getragen, weil $A_1' P_1'$ die erste Tafel, von oben gesehen, im negativen Sinne dreht; ebenso sind $q_1'' q_2'$ gleich h_2' und $q_2'' q_3''$ gleich h_3' der Grösse und dem Vorzeichen nach.

Nun hat eine durch O' zu S_1' gezogene Senkrechte die Richtung des Risses der ersten Momentenaxe in der ersten Tafel; seine Grösse wird von einer durch q_1' gezogenen Parallelen zur Projektionsaxe in u_1' abgeschnitten. Von u_1' aus ist alsdann eine Senkrechte zu S_2' zu ziehen und dieselbe mit einer durch q_2' gezogenen Parallelen zur Projektionsaxe in u_2' zu durchschneiden. Endlich zieht man durch u_2' eine Senkrechte auf S_3' und durchschneidet sie mit einer durch q_3' gezogenen Parallelen zur Projektionsaxe. So erhält man den ersten Riss $O' u_1' u_2' u_3'$ des Axenpolygons und in dessen Schlusslinie $O' u_3'$ den ersten Riss U' der Resultantenaxe. In ganz gleicher Weise kann in der zweiten Tafel der zweite Riss $O'' u_1'' u_2'' u_3''$ des Axenpolygons und damit der zweite Riss der Resultantenaxe U'' gleich $O'' u_3''$ construirt werden.

§. 54. Besondere Fälle; Gleichgewichtsbedingungen. — Wird bei der Vereinigung beliebiger Kräfte im Raume, wie wir sie im vorigen §. ausgeführt haben, die Resultante R der nach einem und demselben Punkt verlegten Kräfte Null, schliesst sich also das Kräftepolygon, so ist die Wirkung sämmtlicher Kräfte gleich der des Resultantengegenpaars, das durch die Resultantenaxe U vollständig bestimmt ist. Wird R nicht Null, dagegen U, schliesst sich also das Axenpolygon, so lassen sich sämmtliche Kräfte in die eine, R, zusammenfassen. Das letztere, nämlich dass sich alle Kräfte in eine einzige Resultante vereinigen lassen, ist auch dann der Fall, wenn weder R noch U Null werden, aber senkrecht aufeinander stehen. Denn alsdann liegen das Gegenpaar, dessen Axe U ist, und die Kraft R in einer Ebene, können also, wie in §. 26 gezeigt, miteinander vereinigt werden, indem man die Kraft R in jener Ebene um ein geeignetes Stück parallel mit sich selbst verschiebt. Ist endlich sowohl die Resultante R als auch die Resultantenaxe U gleich Null, schliessen sich also das Kräfte- und das Axenpolygon, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.

R und U sind aber Null, wenn ihre Projektionen auf drei Axen, die nicht alle in einer Ebene liegen, also die algebraischen Summen der Projektionen der Seiten der Polygone, deren Schlusslinien sie sind, auf solche drei Axen Null sind, und daraus folgt der Satz: Kräfte im Raume

sind im Gleichgewicht, wenn sowohl die algebraische Summe ihrer Projektionen auf drei Axen, die nicht alle in einer Ebene liegen, als auch die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente um solche drei Axen Null ist; oder mehr im Sinne der graphischen Statik gesprochen: Kräfte im Raume sind im Gleichgewicht, wenn sich sowohl die Kräfte- als auch die Seilpolygone aus ihren Projektionen auf jede von drei sich schneidenden Ebenen schliessen.

§. 55. Centralaxe eines Systems beliebiger Kräfte im Raume. — Die Resultante R und das Resultantengegenpaar U, welche im §. 53 als Resultat der Vereinigung beliebiger Kräfte im Raume erhalten wurden, lassen sich noch auf mannichfache Weise umgestalten.

Zunächst kann man U in zwei Componenten-Axen zerlegen, von denen die eine U_1 in der Richtung von R liegt, während die andere U_2 senkrecht darauf steht. Letztere gehört dann einem Gegenpaar an, das mit der Resultante R in einer Ebene liegt, und also mit ihr vereinigt werden kann, indem man sie parallel mit sich selbst in jener Ebene um ein geeignetes Stück verschiebt, ohne ihren Sinn und ihre Grösse zu ändern. So bleibt also noch die verschobene Kraft R_0 und die Componentenaxe U_1 übrig, welch' letztere dieselbe Richtung wie R_0 hat, und folglich einem Gegenpaar angehört, dessen Ebene senkrecht auf R_0 steht. Es lässt sich leicht beweisen, dass dieses Gegenpaar unter allen denen, welche durch Vereinigen des gegebenen Systems von Kräften erhalten werden können, das kleinste Drehungsmoment, also die kleinste Axe hat. In der That fügt jede parallele Versetzung der Kraft R_0 zu dem schon vorhandenen Gegenpaar mit der Axe U_1 ein zweites hinzu, das in der Ebene liegt, in welcher jene Versetzung vorgenommen wurde, dessen Axe also senkrecht auf U_1 steht. Die Vereinigung beider Gegenpaaré gibt allemal ein solches, dessen Axe grösser als U_1 ist.

Man nennt jene Kraft R_0 auch manchmal die Centralaxe des gegebenen Systems von Kräften im Raum. Wir haben sie in Fig. 49, Taf. VII und 50, Taf. VIII für die dort als gegeben vorausgesetzten drei Kräfte construirt. Um zunächst die oben angegebene Zerlegung der Resultantenaxe U vorzunehmen, legten wir durch das Ende derselben eine Ebene senkrecht auf die Kraft R und suchten den Durchnittspunkt dieser Ebene mit der Linie, in welcher letztere Kraft liegt. Die Risse dieses Schnittpunktes sind v' und v'' und daher sind $0'v'$ und $0''v''$ die Projektionen der Componentenaxe U_1, $v'u_3'$ und $v''u_3''$ diejenigen der Axe U_2. Letztere, welche einem Gegenpaar angehört, das mit der Kraft R in einer Ebene liegt, ist mit dieser Kraft zu vereinigen, indem man dieselbe in jener Ebene parallel mit sich selbst um ein geeignetes Stück verschiebt. Dabei werden die Projektionen R' und R'' parallel mit sich selbst nach R_0' und R_0'' derart versetzt, dass das reducirte Drehungsmoment von R_0' um $0'$ der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich der Projektion von U_2 auf eine, in $0'$ zur ersten Tafel senkrecht errichtete Drehungsaxe, also gleich der Projektion von $v''u_3''$ auf eine zur Projektionsaxe senkrechte Linie ist; — und dass ebenso das reducirte Drehungsmoment von R_0'' um $0''$ gleich der Projektion von $v'u_3'$ auf eine zur Projektionsaxe senkrechte Linie wird.

Auf diese Art können R_0' und R_0'' nach ähnlichen zwei Methoden construirt werden, wie wir sie unter a) und b) in §. 53 zur Reduktion der Momente angewendet haben. In Fig. 49, Taf. VII dachten wir uns aus R', das an Grösse, Richtung und Sinn mit dem zu suchenden R_0' übereinstimmt, und dem Pol C', welcher um die Momentenbasis von R' entfernt ist, ein Kräftepolygon gebildet. Das zugehörige Seilpolygon für R_0' muss so liegen, dass die dem R_0' vorhergehende und die ihm nachfolgende Seite auf R' ein Stück abschneiden, das gleich der Projektion von $v''u_3''$ auf eine zur Projektionsaxe senkrechte Linie ist. Trägt man also dieses Stück von $3'$

aus in passendem Sinne auf R′ als 3′a′ auf, und zieht man durch seinen Endpunkt a′ eine Parallele zum Strahl C′O′, so ist der Durchschnitt b′ derselben mit dem gleichzeitig als Seilpolygonseite zu betrachtenden Strahl C′3′ der Knotenpunkt des Seilpolygons, durch welchen R_0' hindurch gehen muss. Der Sinn, in welchem 3′a′ von 3′ aus abzutragen ist, richtet sich nach dem Sinn, in welchem die Drehung von R_0 um O′ erfolgen muss, also nach dem Sinn der Projektion von $v''u_3''$ auf eine zur Projektionsaxe senkrechte Linie; jene Projektion ist in unserem Falle nach oben gekehrt, folglich muss R_0' die erste Tafel, von oben her gesehen, im positiven Sinn um O′ zu drehen suchen, und daher war 3′a′ so abzutragen, wie es in der Figur geschehen ist. Wo in der durch b′ zu R′ gezogenen Parallelen R_0' angenommen wird, ist gleichgültig. Ganz in derselben Weise wie b′ kann in der zweiten Tafel der Punkt b″, durch welchen R_0'' hindurch gehen muss, gefunden werden; und damit ist die Centralaxe R_0 construirt.

In Fig. 50, Taf. VIII hat man aus R′ als Hypotenuse und aus der Projektion von $v''u_3''$ auf eine zur Projektionsaxe Senkrechte als Kathete, welche am Endpunkte 3′ von R′ anliegt, ein rechtwinkeliges Dreieck construirt. Die andere Kathete O′a′, verlängert bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des Kreises, der um O′ mit einem Radius gleich der Momentenbasis gezogen ist, ergibt den Punkt b′, durch den R_0' hindurchgehen muss. Letztere Kraft liegt folglich irgendwo in der Parallelen zu R′, welche durch b′ gezogen wird. Und in der That sieht man leicht, dass jede in dieser Parallelen gelegene Kraft, die mit R′ in Grösse und Sinn übereinstimmt, nach der in Fig. 50 befolgten Reduktionsmethode ein dem 3′a′ gleiches reducirtes Drehungsmoment um O′ geben muss. Der Sinn, nach welchem hin O′a′ zu verlängern ist, um den Punkt b′ zu finden, richtet sich in ganz ähnlicher Weise wie vorhin nach dem Sinne, in welchem R_0' um O′ drehen muss, folglich nach dem Sinne der Projektion von $v''u_3''$ auf eine zur Projektionsaxe Senkrechte. In ganz derselben Weise wie b′ in der ersten Tafel wird der Punkt b″ in der zweiten Tafel gefunden, durch den die zweite Projektion R_0'' von R_0 hindurchgehen muss. Die Grösse, Richtung und der Sinn derselben stimmen mit R″ überein.

§. 56. Verschiedene Umformungen der Resultante und des Resultantengegenpaars eines Systemes beliebiger Kräfte im Raume. — Man kann die Resultante R und das Resultantengegenpaar mit der Axe U, welche als Resultat der Vereinigung eines Systems beliebiger Kräfte im Raume erhalten worden sind, auch so umformen, dass das Gegenpaar verschwindet. Man erhält dann im Allgemeinen zwei sich kreuzende Kräfte als Endresultat und findet diese am einfachsten so, dass man das Gegenpaar, dem U zugehört, so legt, dass der Angriffspunkt eines seiner Kräfte mit dem von R zusammenfällt. Letztere beiden Kräfte kann man dann in eine Resultante vereinigen, welche zusammen mit der zweiten Kraft des Gegenpaars das gesuchte Paar sich kreuzender Kräfte bildet. In allgemeinerer Weise kann dieses auch folgendermassen gefunden werden. Man zerlege R in irgend zwei Componenten R_1 und R_2 und U in zwei Componentenaxen U_1, U_2, die beziehungsweise auf R_1 und R_2 senkrecht stehen; oder man zerlege U in irgend zwei Componentenaxen U_1 und U_2 und R in zwei Componenten R_1 und R_2, die bezw. auf U_1 und U_2 senkrecht stehen, — was auf dasselbe hinauskommt. Dann erhält man durch Vereinigung von R_1 mit dem Gegenpaar, dem U_1 zugehört, eine Resultante R_1', welche der R_1 an Grösse, Richtung und Sinn gleich, gegen diese aber in einer zur Ebene des Gegenpaars parallelen Ebene um ein bekanntes Stück verschoben ist. Eine ähnliche, jene kreuzende Kraft R_2' erhält man durch Vereinigung von R_2 und U_2.

Die Willkürlichkeit, welche theilweise in dem eben beschriebenen Verfahren herrscht, zeigt schon, dass das zu erhaltende sich kreuzende Kräftepaar bestimmten Bedingungen unterworfen werden kann. So z. B. der, dass beide Kräfte senkrecht aufeinander stehen sollen, oder

der, dass die eine in einer gegebenen Axe X liegen soll u. s. w. Im ersteren Fall verlege man, wenn nöthig, die Axe U, bis sie die Resultante R schneidet, und zerlege in der durch beide bestimmten Ebene die Resultante R in zwei Componenten R_1 und R_2, von denen die erste zu U parallel ist, während die zweite senkrecht darauf steht. Letztere kann dann mit dem Gegenpaar, dessen Axe U ist und dessen Ebene durch sie hindurch geht, vereinigt werden und gibt eine mit ihr nach Grösse, Richtung und Sinn übereinstimmende Kraft, die nur um ein bestimmtes Stück verschoben ist und mit R_1 das gesuchte Paar sich kreuzender Kräfte bildet.

Im zweiten Fall verlegt man die Resultante R parallel mit sich selbst, bis sie durch einen beliebigen Punkt O der Axe X hindurchgeht. Das sich dabei ergebende Gegenpaar, dessen Drehungsmoment durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks repräsentirt wird, das R als Grundlinie und O als Spitze hat, vereinigt man mit dem, dessen Axe U ist, und verlegt das Resultantengegenpaar so, dass seine Ebene durch O geht. In diesem Punkt zerlegt man dann die in ihn verlegte Kraft R in zwei Componenten, von denen die eine in der Axe X, die andere in der Ebene jenes Gegenpaars liegt. Letztere wird mit dem Gegenpaar vereinigt, indem man sie in der Ebene desselben um ein gewisses Stück parallel mit sich selbst verlegt, und die so verschobene Kraft bildet mit der ersten Componente das gesuchte Paar sich kreuzender Kräfte.

VII. Abschnitt.

Parallele Kräfte; ihr Mittelpunkt; ihre Momente in Bezug auf eine Ebene.

§. 57. Mittelpunkt paralleler Kräfte, Schwerpunkt. — Nach dem im §. 19 bewiesenen Satze theilt die Resultante zweier paralleler Kräfte P_1, P_2 (Fig. 51, Taf VIII) jede zwischen ihnen gezogene Linie, also auch die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte A_1, A_2 im umgekehrten Verhältniss der beiden Componenten, so dass also

$$A_1 A_{12} : A_{12} A_2 = P_2 : P_1.$$

Dies gilt sowohl für gleich- als auch für entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte. In letzterem Fall hat man den Theilungspunkt A_{12} nur ausserhalb der Endpunkte der Verbindungslinie $A_1 A_2$, also stets auf Seite der grösseren Kraft zu nehmen. Die Resultante selbst ist parallel zu den gegebenen Kräften und gleich ihrer algebraischen Summe der Grösse und dem Vorzeichen nach. Letzteres bestimmt den Sinn der Resultante.

Dreht man nun die parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Grösse um ihre Angriffspunkte in solcher Weise, dass sie sich stets parallel bleiben, so geht für jede Stellung $A_1 P_1'$, $A_2 P_2'$ derselben die Resultante P_{12}' durch den nämlichen Theilungspunkt A_{12} der Verbindungslinie der Angriffspunkte der Componenten hindurch; sie dreht sich also, wie die Componenten um ihre Angriffspunkte, um diesen Theilungspunkt, der desshalb der Mittelpunkt der beiden parallelen Kräfte heisst.

Kommt zu den beiden Kräften P_1, P_2 noch eine dritte P_3 mit dem Angriffspunkt A_3 hinzu, so kann die Resultante der drei parallelen Kräfte dadurch gefunden werden, dass man die Mittelkraft P_{12} der beiden ersten Kräfte in ganz gleicher Weise mit der dritten Kraft vereinigt, wie jene beiden ersten Kräfte unter sich, wobei deren Mittelpunkt A_{12} als Angriffspunkt der Mittelkraft P_{12} betrachtet werden kann. Geschieht das, so theilt die Gesammtresultante P_{1-3} die Verbindungslinie $A_{12} A_3$ im umgekehrten Verhältniss der Kräfte P_{12} und P_3. Für diesen Theilungspunkt gilt bezüglich dieser letzteren Kräfte natürlich dasselbe wie für den Theilungspunkt A_{12} bezüglich der Kräfte P_1 und P_2. Wenn folglich die drei parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3 unter Beibehaltung ihrer Grösse und ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 gedreht werden, so dreht sich ihre Resultante, ihnen stets parallel bleibend, um den Punkt A_{1-3}. Dieser heisst desshalb wieder der Mittelpunkt der drei parallelen Kräfte.

Obige Ausführungen gelten natürlich ebenso, ob die drei Kräfte in einer Ebene liegen oder nicht; sie lassen sich auch sehr leicht auf vier und mehr Kräfte ausdehnen, und auf diese Weise gelangt man zu dem Begriff des Mittelpunktes beliebig vieler paralleler Kräfte. Wenn solche Kräfte unter Beibehaltung ihrer Grösse und ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte gedreht werden, so dreht sich ihre Resultante, ihnen stets parallel bleibend, um einen

Punkt, den Mittelpunkt der Kräfte. Die Lage desselben hängt offenbar nur von der gegenseitigen Lage der Angriffspunkte und von dem Grössen verhältnisse der gegebenen Kräfte ab, nicht aber von deren absoluter Grösse oder von ihrer Richtung. Wenn folglich von einem Mittelpunkt paralleler Kräfte die Rede ist, so hat man sich dieselben immer an bestimmten gegebenen Angriffspunkten wirkend zu denken.

In dem Falle, wo die Kräfte die Gewichte von Massen-Elementen sind, die starr miteinander verbunden und als Angriffspunkte der Kräfte gedacht werden, heisst der Mittelpunkt jener parallelen Schwerkräfte der Schwerpunkt des Körpers, der aus jenen Massenelementen besteht.

§. 58. Graphisches Verfahren zur Aufsuchung des Mittelpunktes paralleler Kräfte. — Die oben ausgesprochene Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte gibt ein einfacheres Verfahren für seine Aufsuchung an die Hand, als dasjenige ist, welches wir im vorigen §. vor Augen hatten, wo wir die gegebenen Parallelkräfte successive miteinander vereinigt haben, nämlich zuerst zwei, dann die Mittelkraft derselben mit einer dritten u. s. w. f. Zeichnet man die gegebenen parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Angriffspunkte, ihrer Grösse und ihres Parallelismus in zwei verschiedenen Richtungen und construirt in beiden Fällen ihre Resultanten, so ist der Durchschnittspunkt derselben der gesuchte Mittelpunkt.

Dieses Verfahren ist für den Fall, wo die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen, unmittelbar anwendbar. Man kann dann die Kräfte in zwei verschiedenen Richtungen in dieser Ebene zeichnen und jedesmal mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons ihre Resultante in sehr einfacher Weise finden. In dem Falle, wo die Angriffspunkte der parallelen Kräfte beliebig im Raume liegen, führt ein Satz, der sehr leicht bewiesen werden kann, in einfacher Weise zur Kenntniss ihres Mittelpunktes. Der Satz lautet: Die Parallelprojektion des Mittelpunktes paralleler Kräfte, nach irgend welcher Richtung auf eine beliebige Ebene genommen, ist der Mittelpunkt paralleler Kräfte von derselben Grösse oder auch nur von demselben Grössenverhältniss wie die gegebenen, welche an den Parallelprojektionen der Angriffspunkte der letzteren thätig gedacht werden. Diese an den Projektionen der Angriffspunkte wirkenden Kräfte können in der Projektionsebene angenommen und als Projektionen der gegebenen Kräfte im Raum aufgefasst werden, welch' letzteren ja jede beliebige Richtung, auch die parallel zur Projektionsebene gegeben werden kann.

Der Beweis des Satzes ist, wie aus den Ausführungen im §. 57 unmittelbar hervorgeht, leicht auf beliebig viele Kräfte auszudehnen, wenn er nur für zwei geführt ist. Für diese aber leuchtet seine Richtigkeit fast von selbst ein. Denn sind A_1 und A_2 (Fig. 52, Taf. VIII) die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte, A'_1 und A'_2 ihre in irgend einer Richtung genommenen Parallelprojektionen auf die beliebige Projektionsebene E E, endlich A_{12} der Mittelpunkt der gegebenen Kräfte, welcher die Verbindungslinie $A_1 A_2$ ihrer Angriffspunkte im umgekehrten Verhältniss der Kraftintensitäten theilt, so liegt die Parallelprojektion A'_{12} dieses Mittelpunkts in der Verbindungslinie der Parallelprojektionen A'_1 und A'_2 und theilt diese Verbindungslinie in dem nämlichen Verhältniss $A_1 A_{12} : A_{12} A_2$. A'_{12} ist folglich der Mittelpunkt zweier in den Parallelprojektionen der Angriffspunkte wirkenden Parallelkräfte von derselben Grösse oder demselben Grössenverhältniss wie die gegebenen Kräfte. Die Uebertragung des Satzes auf drei und mehrere parallele Kräfte ist, wie schon bemerkt, sehr leicht. Als unmittelbare Folge aus ihm ergibt sich der andere, dass die Parallelprojektion der Resultante paralleler Kräfte auf irgend eine Ebene die Mittelkraft der Parallelprojektionen dieser Kräfte auf dieselbe Ebene ist.

Um mittelst des eben bewiesenen Satzes den Mittelpunkt gegebener paralleler Kräfte im Raume zu finden, projicire man deren Angriffspunkte nach irgend welcher Richtung auf eine beliebige Ebene, denke sich an den Projektionen in der Projektionsebene die gegebenen Kräfte einmal in einer, dann in irgend einer anderen Richtung wirkend, und bestimme beidesmal mittelst Kräfte- und Seilpolygon ihre Resultante. Der Durchschnittspunkt beider Resultanten ist dann die Projektion des gesuchten Mittelpunktes, der folglich in dem von derselben ausgehenden Projektionsstrahl liegt. Wo? in diesem erfährt man, wenn man die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte noch einmal in anderer Richtung auf dieselbe oder auf eine andere Projektionsebene projicirt, in den erhaltenen Projektionen die gegebenen Kräfte, in der Projektionsebene liegend, nach irgend einer Richtung hin wirken lässt und ihre Resultante mittelst des Kräfte- und Seilpolygons aufsucht. In der durch diese Resultante bestimmten projicirenden Ebene liegt die Resultante der gegebenen Kräfte im Raum, wenn diesen dieselbe Richtung wie den zuletzt vereinigten Parallelkräften gegeben wird. Der gesuchte Mittelpunkt ist folglich der Durchschnittspunkt des oben erhaltenen Projektionsstrahls mit der eben bestimmten projicirenden Ebene; und dieser Durchschnittspunkt kann immer erhalten werden, wenn man nur dafür sorgt, dass der Projektionsstrahl und die projicirende Ebene nicht zusammenfallen, was immer leicht geschehen kann.

Für parallele Kräfte im Raum hat man somit drei Kräfte- mit ihren zugehörigen Seilpolygonen zu construiren. In der Regel werden die Angriffspunkte solcher Kräfte durch ihre Orthogonal-Risse in zwei aufeinander senkrecht stehenden Tafeln gegeben sein. Dann kann man zwei von den obigen drei Kräfte- und Seilpolygonen in der einen, etwa in der zweiten dieser Tafeln construiren, indem man an den Rissen der Angriffspunkte in derselben die gegebenen Kräfte einmal in einer, das anderemal in irgend einer anderen davon verschiedenen Richtung, die jedoch wie die vorige in die Projektionstafel fällt, wirken lässt. Der Durchschnittspunkt der beiden so erhaltenen Resultanten ist der zweite Riss des gesuchten Mittelpunktes. Der erste Riss desselben liegt in einer durch jenen gezogenen Senkrechten zur Projektionsaxe und in der Resultante, welche man in der ersten Tafel aus den gegebenen Kräften construirt, die man an den ersten Rissen der gegebenen Angriffspunkte in irgend welcher, nur nicht zur Projektionsaxe senkrechten Richtung wirken lässt.

Diese Construktion wurde beispielsweise in Fig. 53, Taf. VIII mit vier Parallelkräften durchgeführt, deren Angriffspunkte durch ihre orthogonalen Risse A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 und A''_1, A''_2, A''_3, A''_4 auf zwei aufeinander senkrecht stehenden Tafeln gegeben sind. Die Risse der Parallelkräfte selbst sind nicht gezeichnet, da neben ihren Angriffspunkten nur ihre Grösse und ihr Sinn gegeben zu sein braucht, ihre Richtung aber für vorliegende Aufgabe gleichgültig ist. Jene, Grösse und Sinn der Parallelkräfte nämlich, sind aus dem Kräftepolygon $0''1''2''3''4''$ zu entnehmen, welches in der zweiten Tafel auf eine willkürliche Linie aufgetragen wurde. Legen wir durch die Punkte $A''_1, A''_2 \ldots$ Linien parallel zur Kraftrichtung $0''4''$ im Kräftepolygon, nehmen wir in letzterem einen beliebigen Punkt C'' als Pol und construiren wir aus diesem das Seilpolygon $0''I''II'' \ldots V''$, so geht die Resultante der in der angenommenen Richtung an den Punkten A''_1, $A''_2 \ldots$ wirkenden Parallelkräfte durch den Durchschnittspunkt α'' der äussersten Seilpolygonseiten, liegt also in der zur Kraftrichtung parallelen Linie R''. Eine zweite solche Linie R''' erhält man, wenn man den in den Punkten $A''_1, A''_2 \ldots$ angreifenden Kräften eine andere Richtung in der zweiten Tafel gibt, das Kräftepolygon $0'''1''' \ldots 4'''$ aus ihnen zeichnet mit dem willkürlichen Punkt C''' als Pol, daraus das Seilpolygon $0'''I''' \ldots V'''$ construirt und durch den Durchschnittspunkt α''' der äussersten Seiten desselben R''' parallel zur zweiten Kraftrichtung zieht. Der

Durchschnittspunkt A_0'' der beiden Linien R'' und R''' ist der zweite Riss des gesuchten Mittelpunktes. Um den ersten Riss desselben zu erhalten, legten wir in der ersten Tafel durch die Projektionen A_1', A_2'... der Angriffspunkte Linien parallel zur Projektionsaxe, zeichneten für diese Richtung aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon $0'$ $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ mit dem willkürlichen Punkt C' als Pol und endlich das zugehörige Seilpolygon $0'$ I' II' ... V'. In der Linie R', welche durch den Durchschnittspunkt a' der äussersten Seiten des letzteren parallel zur Kraftrichtung gezogen ist, muss dann der erste Riss A_0' des gesuchten Mittelpunktes liegen, welcher somit jetzt vollständig bestimmt ist.

Es versteht sich wohl von selbst, dass man bei der in der Figur getroffenen Anordnung das Kräftepolygon C''' $0'''$ $1'''$ $2'''$ $3'''$ $4'''$ auch mit dem C' $0'$ $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ hätte zusammenfallen lassen können; und dass das Kräftepolygon C'' $0''$ $1''$ $2''$ $3''$ $4''$ so gezeichnet werden kann, dass es dem C' $0'$ $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ ganz gleich wird und nur um 90^0 verdreht erscheint. Dann werden die Seiten des Seilpolygons $0'''$ I''' ... V''' parallel und die des Seilpolygons $0''$ I'' ... V'' senkrecht zu denen des Seilpolygons $0'$ I' II' ... V', und alle drei können zugleich aus dem Kräftepolygon C' $0'$ $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ allein durch einmaliges Anlegen der Paralleldreiecke für jede Seite construirt werden.

§. 59. **Weitere Eigenschaften des Mittelpunktes paralleler Kräfte.** — Aus der im §. 57 gegebenen Definition des Mittelpunktes paralleler Kräfte folgen unmittelbar noch folgende Eigenschaften desselben: Wenn die Parallelkräfte in Gruppen getheilt werden können, so, dass die Mittelpunkte aller Gruppen

a) in einem Punkt zusammenfallen, so ist dies zugleich der Mittelpunkt aller gegebenen Kräfte;

b) in einer geraden Linie oder in einer Ebene liegen, so fällt auch der Mittelpunkt aller gegebenen Kräfte in diese gerade Linie, bezw. Ebene.

Eine weitere Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte soll in folgendem §. abgeleitet werden.

§. 60. **Momente paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene.** — Man nennt das Produkt aus einer Kraft in die senkrecht oder schief gemessene Entfernung ihres Angriffspunktes von einer gegebenen Ebene das M o m e n t d e r K r a f t i n B e z u g a u f d i e s e E b e n e und die letztere die M o m e n t e n e b e n e. Doch wird diese Bezeichnung nur gebraucht, wenn die Kraft einem System von Parallelkräften angehört. Unter dem Gesammtmoment eines solchen Systems von Parallelkräften in Bezug auf eine gegebene Momentenebene versteht man dann die algebraische Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf jene Ebene, wobei selbstverständlich die Entfernungen der Angriffspunkte von derselben alle in der nämlichen senkrechten oder schiefen Richtung gemessen werden müssen. Bei der Bildung jener algebraischen Summe hat man den einzelnen Parallelkräften das positive oder negative Vorzeichen zu ertheilen, je nachdem sie in dem einen oder im entgegengesetzten Sinn wirken; und die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von der Momentenebene sind mit positivem oder negativem Zeichen zu versehen, je nachdem diese Punkte auf der einen oder anderen Seite der Momentenebene liegen. Das Moment jeder einzelnen Kraft erhält natürlich dasjenige Vorzeichen, welches ihm als Produkt jener beiden Faktoren zukommt, und ist mit diesem Vorzeichen in die algebraische Summe der Momente einzuführen. Die Richtung der Kräfte ist dabei ganz gleichgültig. Denkt man sich dieselbe gleichzeitig und in gleicher Weise um ihre Angriffspunkte gedreht, so werden dadurch ihre Momente nicht geändert, weder im Einzelnen, noch im Gesammten. Dabei dreht sich in gleicher Weise die Resultante der Kräfte

um den Mittelpunkt derselben. Nimmt man also, wie das in der Folge jetzt immer stillschweigend vorausgesetzt werden soll, den Mittelpunkt paralleler Kräfte als den Angriffspunkt ihrer Resultante, so ist das Moment derselben in Bezug auf eine gegebene Momenten-Ebene auch ein ganz bestimmtes, von ihrer und der Richtung der Kräfte unabhängiges. Es liegt also nahe, eine Beziehung aufzusuchen zwischen dem Gesammtmoment eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene und dem ihrer Resultante in Bezug auf dieselbe Ebene. Diese Beziehung ist sehr einfach und in dem Satz ausgesprochen: Das Gesammtmoment eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene ist gleich dem Moment ihrer Resultante in Bezug auf dieselbe Ebene.

Der Beweis dieses Satzes ist leicht zu führen. Denken wir uns die gegebenen Parallelkräfte parallel zur Momentenebene gestellt und in derselben Richtung auf diese projicirt, in welcher die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von derselben gemessen werden. Dann ist nach dem im §. 58 enthaltenen Satz die Projektion der Resultante die Mittelkraft der Projektionen der einzelnen Kräfte. Nun können wir uns jede der gegebenen Parallelkräfte sowie auch ihre Resultante zerlegt denken in die ihnen bezw. gleiche und parallele Kraft, welche ihre Projektion repräsentirt, und in ein Gegenpaar, das in der projicirenden Ebene der betr. Kraft gelegen ist, und dessen Moment der Grösse und dem Vorzeichen nach durch dasjenige Dreieck mit seinem Kreispfeil repräsentirt wird, das die gegebene Kraft oder Resultante im Raum als Grundlinie und die Projektion des Angriffspunktes derselben als Spitze hat. Die Projektionen der gegebenen Parallelkräfte geben miteinander vereinigt die Projektion der Resultante. Die diesen Kräften zugehörigen Gegenpaare liegen sämmtlich in parallelen, nämlich projicirenden Ebenen und können folglich in die projicirende Ebene der Resultante verlegt werden. Sie vereinigen sich dort zu einem Resultantenpaar, dessen Drehungsmoment gleich der algebraischen Summe ihrer Drehungsmomente ist. Dasselbe, mit der Projektion der Resultante vereinigt, muss die Resultante selbst ergeben. Bei dieser Vereinigung wird die Projektion der Resultante in der projicirenden Ebene so weit parallel mit sich selbst verschoben, bis das aus der verschobenen Kraft als Grundlinie und dem Angriffspunkt der Projektion als Spitze gebildete Dreieck durch seinen doppelten Flächeninhalt das Drehungsmoment des Resultanten-Gegenpaars repräsentirt. Es muss folglich der Flächeninhalt des Dreiecks, welches die Resultante der gegebenen Parallelkräfte im Raum als Grundlinien und die Projektion ihres Angriffspunktes auf die Momentenebene zur Spitze hat, gleich der algebraischen Summe der Flächeninhalte der Dreiecke sein, welche die einzelnen Parallelkräfte als Grundlinien und die Projektionen ihrer Angriffspunkte zu Spitzen haben, wobei diesen Dreiecksflächen das positive oder negative Vorzeichen zu geben ist, je nachdem der ihnen zugehörige Kreispfeil die eine oder andere Drehrichtung angibt. Nun bilden die Grundlinien aller der genannten Dreiecke mit denjenigen von ihren Seiten, welche zugleich die in der bestimmten Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte der betreffenden Kräfte von der Momentenebene sind, entweder gleiche oder Supplementswinkel. Die Flächen der Dreiecke sind also den Produkten aus ihren Grundlinien in jene Seiten proportional; und daraus folgt der Satz: die algebraische Summe der Produkte der Kräfte in die in bestimmter Richtung gemessenen Entfernungen ihrer Angriffspunkte von der Momentenebene, kurz das Gesammtmoment der Kräfte ist gleich dem Produkt aus der Resultante in die in gleicher Richtung gemessene Entfernung ihres Angriffspunktes, des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, d. h. gleich dem Moment der Resultante in Bezug auf die Momenten-Ebene.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes sind die beiden folgenden: 1) Wenn die An-

griffspunkte paralleler Kräfte in parallelen Ebenen beliebig verschoben werden, so bewegt sich der Mittelpunkt der Kräfte in einer zu jenen parallelen Ebene. 2) Das Gesammtmoment paralleler Kräfte in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Momentenebene ist gleich Null, und umgekehrt: Ist das Gesammtmoment paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene Null, so muss diese durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte gehen.

§. 61. Besonderer Fall: Parallele Kräfte, deren algebraische Summe Null ist. — Das im §. 58 gelehrte Verfahren für die Aufsuchung des Mittelpunktes paralleler Kräfte verliert seine Anwendbarkeit in dem Falle, wo die algebraische Summe dieser Kräfte Null wird, das Kräftepolygon aus ihnen sich schliesst. Denkt man sich in diesem Falle den Mittelpunkt aller der Kräfte, mit Ausnahme der letzten, gefunden, so erhält man stets einen solchen, da die Summe der jetzt zu vereinigenden Kräfte gewiss nicht Null ist; sie ist vielmehr der letzten Kraft an Grösse gleich, zu ihr parallel aber von entgegengesetztem Sinne, bildet also, wenn man sie in jenem Mittelpunkt angebracht denkt, im Allgemeinen ein Gegenpaar mit ihr; nur in dem Falle, wo den parallelen Kräften eine Richtung gegeben wird, die mit derjenigen der Verbindungslinie jenes Mittelpunktes mit dem Angriffspunkt der letzten Kraft übereinstimmt, sind jene beiden Kräfte im Gleichgewicht. Für jede Momentenebene, die parallel zur eben genannten Verbindungslinie liegt, ist offenbar die algebraische Summe der Momente der obigen beiden Kräfte, nämlich der Resultante aus allen Kräften, mit Ausnahme der letzten, und dieser letzten, Null. Diese algebraische Summe ist aber keine andere als die der Momente sämmtlicher Kräfte. Nun kann man aus diesen letzteren auf eine Menge von Arten ein Paar gleicher und gleichgerichteter Kräfte von entgegengesetztem Sinne erhalten. Man darf nur die Kräfte in irgend zwei Gruppen theilen, von denen die eine möglicherweise auch nur eine einzige Kraft enthalten kann, so dass ihr Mittelpunkt der Angriffspunkt dieser Kraft selbst ist. Die algebraische Summe der Kräfte ist dann in keiner dieser Gruppen Null, man kann also ihre Mittelpunkte suchen. In denselben wirken dann zwei gleiche und gleichgerichtete Kräfte von entgegengesetztem Sinne, die Resultanten der Gruppen. Die algebraische Summe der Momente dieser Resultanten ist bezüglich jeder Ebene gleich dem Gesammtmoment sämmtlicher Kräfte für dieselbe Ebene, also Null für jede der oben gebrauchten Ebenen, welche parallel zur Verbindungslinie des Mittelpunkts aller Kräfte, mit Ausnahme der letzten, mit dem Angriffspunkt jener letzten waren. Daraus folgt, dass die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier solcher Gruppen, in welche die Kräfte getheilt werden können, parallel zu einander sind. Und da im Allgemeinen der Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte auf der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte liegt, so kann man den unendlich fernen Punkt, welcher allen jenen parallelen Verbindungslinien gemeinschaftlich ist, den Mittelpunkt der gegebenen parallelen Kräfte, deren algebraische Summe Null ist, nennen.

In dem ganz speziellen Fall, wo die Mittelpunkte zweier Gruppen, in die man die parallelen Kräfte von obiger Art getheilt hat, zusammenfallen, wirken in diesem Punkte immer zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die Resultanten jener Gruppen. Die gegebenen Kräfte sind folglich immer im Gleichgewicht, welche Richtung man ihnen auch geben mag; oder, wie wir der Kürze halber sagen wollen, sie sind im indifferenten Gleichgewicht. Die algebraische Summe der Momente jener beiden Kräfte und folglich auch die der gegebenen Kräfte ist dann Null für j e d e Ebene. Daraus folgt, dass die Mittelpunkte je zweier Gruppen, in welche die gegebenen Kräfte getheilt werden können, zusammenfallen, wenn dies für irgend e i n Gruppenpaar

der Fall ist, und dass alsdann auch der Angriffspunkt jeder der gegebenen Kräfte der Mittelpunkt der übrigen Kräfte ist.

§. 62. Reduktion der Momente paralleler Kräfte bezüglich einer Ebene auf eine gemeinschaftliche Basis und Construktion dieser reducirten Momente. — Die im §. 60 definirten Momente von Kräften in Bezug auf eine Ebene haben geometrisch die Bedeutung von Flächen, wie die früher behandelten Drehungsmomente, und müssen wie diese behufs weiterer graphischer Behandlung in Linien ausgedrückt, d. h. auf eine gemeinschaftliche Basis reducirt werden.

Die so reducirten Momente paralleler Kräfte im Raume in Bezug auf eine bestimmte Momentenebene können sogar, wie eine einfache Betrachtung sogleich zeigen wird, auf die reducirten Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene zurückgeführt werden, so dass sie, einzeln sowohl wie auch die algebraischen Summen aller oder mehrerer aufeinanderfolgender, ganz so gefunden werden können, wie dies für die Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene im §. 47 gezeigt wurde.

Denken wir uns ein System paralleler Kräfte mit ihren Angriffspunkten gegeben und eine Momentenebene E, von welcher die Entfernungen jener Angriffspunkte in irgend einer beliebigen Richtung gemessen werden. Nehmen wir eine zweite, die Momentenebene schneidende, übrigens aber ganz beliebige Ebene E' als Projektionsebene und geben wir den gegebenen Kräften, indem wir sie um ihre Angriffspunkte drehen, eine Richtung parallel zur Durchschnittslinie X der beiden Ebenen, der Projektions- und der Momentenebene, so dass sie zu jeder dieser Ebenen parallel werden. In dieser Stellung projiciren wir sie nach irgend einer der Momentenebene parallelen Richtung auf die Projektionsebene; dann werden ihre Projektionen an Grösse, Richtung und Sinn ihnen selbst gleich und sämmtlich parallel zur Durchschnittslinie der Projektions- und Momenten-Ebene. Die senkrecht gemessenen Entfernungen der Projektionen von letzterer Durchschnittslinie haben zu den in bestimmter, vorgegebener Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte der betreffenden Kräfte von der Momentenebene offenbar durchweg das nämliche Verhältniss, und folglich sind auch die Drehungsmomente der Kräfteprojektionen in der Projektionsebene um einen Punkt jener Durchschnittslinie den Momenten der entsprechenden Kräfte in Bezug auf die gegebene Momentenebene proportional. Beide stehen in demselben Verhältniss zu einander wie diejenigen beiden Entfernungen irgend eines Punktes von der Momentenebene, von denen die eine D' in einer zur Projektionsebene parallelen und auf der Durchschnittslinie X derselben mit der Momentenebene senkrechten Richtung, die andere D in derselben Richtung wie die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen wird.

Nun erhält man die Drehungsmomente der parallelen Kräfteprojektionen in der Ebene E' für irgend einen Punkt der Axe X, wenn man sie durch ein Kräfte- und Seilpolygon miteinander verbindet. Der Abschnitt, welchen zwei Seiten des letzteren auf der Linie X machen, ist die algebraische Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfte, welche zwischen jenen Seiten liegen, oder das Drehungsmoment einer Kraft, wenn die Polygonseiten derselben unmittelbar vorausgehen und nachfolgen. Die Momentenbasis H' ist gleich der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie. Dieselben Abschnitte geben also, und zwar der Grösse und Richtung, d. h. dem Vorzeichen nach, die Momente der entsprechenden gegebenen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene, wenn man nur statt der Basis H' eine andere H nimmt, zu welcher sie in demselben Verhältniss steht, wie die beiden Entfernungen D' und D zu einander. Was den Sinn, das Vorzeichen jener Abschnitte anbelangt, so hat man denjenigen als positiv zu

nehmen, welcher einer Kraft zugehört, die in dem als positiv herausgehobenen Sinne wirkt, und deren Angriffspunkt auf der positiven Seite der Momentenebene liegt.

Wenn man sich erinnert, dass die Basis H' oder die senkrecht gemessene Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie dieselbe Richtung wie die Entfernung D' hat, so kann man sehr einfach die Basis H aus ihr construiren. Man darf nur durch den Pol eine Linie parallel zur Richtung der Entfernung D und durch den Fusspunkt der vom Pol auf die Kräftelinie gefällten Senkrechten eine Parallele zur Momentenebene legen, welche jene Parallele schneidet, dann ist das Stück zwischen diesem Schnittpunkt und dem Pol auf der ersten Parallellinie die gesuchte Basis H. In dem Falle, wo die Projektionsebene parallel zu der Richtung genommen wird, in welcher die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen werden, vereinfacht sich diese Construktion bedeutend. Es ist dann die gesuchte Basis gleich der in jener Richtung gemessenen Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie. Wegen dieser Einfachheit wird man die Projektionsebene, wo nur immer möglich, so wählen wie oben vorausgesetzt. In der Regel wird, wenn man es mit den Momenten paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene zu thun hat, die Basis H derselben gegeben sein; dann muss man aus derselben durch eine ähnliche Construktion wie oben oder durch irgend eine der bekannten Proportional-Constructionen die Basis H' der Drehungsmomente finden und ihr die senkrechte Entfernung des Pols von der Kräftelinie im Kräftepolygon, das behufs Aufsuchung jener Drehungsmomente construirt werden muss, gleich machen.

Für gewöhnlich wird man Orthogonalprojektionen schiefen vorziehen. Dann hat man von vornherein die Projektionsebene E' senkrecht zur Momentenebene E zu nehmen. Die Richtung der einen Entfernung, D', irgend eines Punktes von der Momentenebene, diejenige, welche parallel zur Projektionsebene und senkrecht auf ihrer Schnittlinie mit der Momentenebene genommen wird, steht dann einfach senkrecht auf der Momentenebene. Sie bildet folglich die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die andere Entfernung D desselben Punktes von der Momentenebene, nämlich diejenige ist, welche in derselben Richtung wie die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte von dieser Ebene genommen wird. Beide, Kathete und Hypotenuse, bilden einen ganz bestimmten, durch die Richtung, in welcher jene Entfernungen der Angriffspunkte gemessen werden müssen, allein schon vorgezeichneten spitzen Winkel φ miteinander. Um folglich aus der Basis H', der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie, die andere Basis H zu construiren, darf man einfach nur durch den einen Endpunkt jener Basis H', durch den Pol, in der Ebene des Kräftepolygons eine Linie ziehen, die den Winkel φ mit jener Basis bildet. Die Strecke dieser Linie zwischen dem Pol und ihrem Durchschnitt mit der Kräftelinie ist die Basis H. Dieselbe kann also auch die Entfernung des Pols von der Kräftelinie genannt werden, gemessen aber in einer Richtung, welche den spitzen Winkel φ mit der Senkrechten auf die Kräftelinie bildet. Wenn also umgekehrt die Basis H der Momente der parallelen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene gegeben ist, so hat man den Pol des Kräftepolygons in der Projektionsebene so anzunehmen, dass seine Entfernung von der Kräftelinie, gemessen in einer Richtung, welche den spitzen Winkel φ mit der Senkrechten auf jene bildet, gleich der Basis H wird.

Der Winkel φ wird Null, wenn die Entfernungen der Angriffspunkte der gegebenen Parallelkräfte von der Momentenebene in senkrechter Richtung gemessen werden. Dann fällt die Basis H mit der H' zusammen, d. h. die Drehungsmomente der Kräfteprojektionen in der Projektions-Ebene um irgend einen Punkt der Schnittlinie derselben mit der Momentenebene sind gleich den

Momenten der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene, und zwar bezogen auf dieselbe Basis: die senkrechte Entfernung des Pols im Kräftepolygon, das in der Projektionsebene gezeichnet wird, von der Kräftelinie desselben.

Dies letztere Resultat, gültig für den einfachsten Fall, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene senkrecht zu dieser gemessen und orthogonale Projektionen gebraucht werden, leuchtet eigentlich ganz von selbst ein. Aus ihm ist das andere für schief gemessene Entfernungen und Orthogonalprojektionen sehr einfach abzuleiten, einfacher als wenn man zuerst den allgemeinsten Fall für schiefgemessene Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene und schiefe Projektionen nimmt. Doch ist der letztere an sich von Interesse und für folgende Untersuchungen von Wichtigkeit; er konnte desshalb nicht übergangen werden.

Beispielsweise denken wir uns in Fig. 53, Taf. VIII vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 mit ihren Angriffspunkten gegeben, letztere durch ihre Orthogonalrisse A_1', A_2'... und A_1'', A_2''... in zwei aufeinander senkrecht stehenden Tafeln. Die eine derselben, die zweite, sei die Momenten-, die andere, die erste, die Projektionsebene. Dann müssen wir die Kräfte parallel zur Projektionsaxe stellen; ihre orthogonalen Projektionen auf die erste Tafel sind dann gleichfalls parallel zu jener Axe und gehen durch die Risse der Angriffspunkte. Das Kräftepolygon, welches aus den mit den gegebenen Kräften gleichgrossen Projektionen in der ersten Tafel zu zeichnen ist, sei 0' 1' 2' 3' 4', ferner C', in einer senkrechten Entfernung gleich der Momentenbasis von der Kräftelinie, der Pol und 0' I' II' III' IV' V' das zugehörige Seilpolygon. Verlängert man die Seiten desselben bis zu ihren Durchschnitten mit der Projektionsaxe, so sind die Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$ die reducirten Drehungsmomente der Kräfteprojektionen in der ersten Tafel um irgend einen Punkt der Projektionsaxe. Dieselben Abschnitte, bezogen auf dieselbe Basis, sind aber auch die Momente der gegebenen Parallelkräfte bezüglich der zweiten Tafel als Momentenebene, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von dieser Ebene in senkrechter Richtung gemessen werden. Werden aber diese Entfernungen in schiefer, mit der Senkrechten den spitzen Winkel φ bildenden Richtung gegen die Momentenebene gemessen, so bedeuten die Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$ .., immer noch die reducirten Momente der Kräfte bezüglich der zweiten Tafel als Momentenebene. aber sie müssen auf eine Basis C'q' bezogen werden, welche die Entfernung des Poles C' im Kräftepolygon von der Kräftelinie in schiefer Richtung, die den spitzen Winkel φ mit der senkrechten bildet, misst.

Wird bei allen Verdrehungen, welche man mit den Kräften P_1, P_2 ... vornehmen kann stets die Richtung der P_1 als positiv aufgefasst, und wird die Entfernung ihres Angriffspunktes A_1 von der zweiten Tafel ebenfalls positiv genommen, dann ist der Sinn des Abschnitts $m_0 m_1$ jener Kraft derjenige der positiven Momente.

Es versteht sich von selbst, dass die algebraischen Summen $m_0 m_2$, $m_0 m_3$, $m_0 m_4$ obiger Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$ ... die algebraischen Summen der Momente oder die Gesammtmomente der zwei oder drei ersten, bezw. aller vier gegebenen Parallelkräfte in Bezug auf die zweite Tafel als Momentenebene vorstellen.

§. 63. Besonderer Fall, wo die Angriffspunkte sämmtlicher parallelen Kräfte in einer Ebene liegen. — Wenn die Angriffspunkte der gegebenen Parallelkräfte sämmtlich in einer und derselben Ebene E' gelegen sind, welche von der Momentenebene E nach einer Linie X geschnitten wird, und es werden die Entfernungen jener Angriffspunkte von der Momentenebene durchweg nach Richtungen gemessen, die zur Ebene E' parallel sind, dann sind jene Entfernungen gleichbedeutend mit den in gleicher Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffs-

punkte von der Linie X. In diesem Sinne kann man tolglich dann auch von den Momenten der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Linie X in der Ebene ihrer Angriffspunkte sprechen. Sie sind unter der oben gemachten beschränkenden Voraussetzung für die Entfernungen gleichbedeutend mit den Momenten derselben Kräfte in Bezug auf eine Momentenebene, welche die Ebene der Angriffspunkte nach der Linie X schneidet. Letztere wird desshalb auch Momentenaxe genannt.

Es ist sehr leicht, die Construktionsweise der Momente für diesen besonderen Fall aus den im vorigen §. behandelten allgemeineren Fällen abzuleiten. Nehmen wir die Ebene E′ der Angriffspunkte als Projektionsebene, so haben wir die gegebenen Kräfte parallel zur Linie X zu stellen. Sie fallen dann offenbar mit ihren Projektionen auf die Ebene E′ zusammen. Zeichnet man also in dieser Ebene das Kräfte- und Seilpolygon aus ihnen, so sind die Abschnitte, welche die Seiten des letzteren auf der Linie X bilden, die reducirten Drehungsmomente der Kräfte um irgend einen Punkt der Linie X, bezogen auf eine Momentenbasis gleich der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie. Dieselben Abschnitte, bezogen auf dieselbe Basis, sind die Momente der Kräfte in Bezug auf die Axe X, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von dieser Linie senkrecht zu ihr gemessen werden. Werden aber diese Entfernungen in irgend einer anderen schiefen Richtung gemessen, so bleiben jene Abschnitte immer noch die Momente der Kräfte bezüglich der Axe X, aber sie beziehen sich auf eine Basis, welche gleich der in derselben schiefen Richtung gemessenen Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie ist.

VIII. Abschnitt.

Vom Schwerpunkt.

§. 64. **Definition des Schwerpunktes eines Körpers; homogene Körper.** — In den Elementen, in welche wir uns das Volumen eines schweren Körpers zerlegt denken können, wirken vertikal abwärts gerichtete, also parallele Kräfte, von durchaus gleichem Sinn, die Gewichte dieser Elemente. Der Mittelpunkt derselben ist der Schwerpunkt des Körpers. Durch denselben geht in jeder Lage des Körpers die Resultante der sämmtlichen, an den einzelnen Theilchen desselben angreifenden Schwerkräfte hindurch; er kann also immer als der Angriffspunkt jener Resultante betrachtet werden, welche vertikal abwärts gerichtet, gleich der Summe der Componenten, also gleich dem Gewichte des ganzen Körpers ist. Das Verfahren zur Aufsuchung des Schwerpunktes ist daher im Allgemeinen ganz das nämliche, wie das im vorigen Abschnitt kennen gelernte für die Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte überhaupt. Man hat nur im Auge zu behalten, dass man es im gegenwärtigen Falle stets mit einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Kräfte zu thun hat.

Wenn die gleichgrossen Elemente, in welche man sich einen Körper zerlegt denkt, gleichschwer sind, so heisst der Körper homogen. In diesem Falle hat man es also mit Kräften zu thun, die nicht blos parallel und gleichgerichtet, sondern auch noch von gleicher Grösse sind, was die Aufsuchung des Schwerpunktes offenbar erleichtert. Wir werden im Folgenden nur solche homogene Körper behandeln.

§. 65. **Materielle Linien und Flächen und ihr Schwerpunkt im Allgemeinen.** — Es ist manchmal möglich, die Elemente eines Körpers so in Gruppen zu vereinigen, dass die Schwerpunkte dieser Gruppen alle in eine Ebene oder in eine gerade Linie fallen. Denkt man sich dann in diesen Schwerpunkten Kräfte gleich den Gewichten jener Gruppen wirkend, so liegt deren Mittelpunkt, der Schwerpunkt des ganzen Körpers, gleichfalls in jener Ebene, bezw. Linie. Er kann also im ersten Fall schon mittelst der Construktion zweier Kräfte- und zugehöriger Seilpolygone, im letzteren durch Construktion eines solchen gefunden werden.

Ist die Zahl jener Gruppen selbst wieder eine sehr grosse, so kann man sich die Ebene, bezw. Linie, in welcher ihre Schwerpunkte liegen, in Elemente zerlegt denken, deren jedes einen jener Schwerpunkte enthält, und kann diesen Elementen die Gewichte der betreffenden Gruppen zuschreiben. Man erhält auf diese Weise eine materielle ebene Fläche oder gerade Linie, deren Schwerpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt. Haben sämmtliche Gruppen, in die man sich die Elemente eines Körpers zusammengefasst denkt, gleiche Gewichte, dann sind gleichgrosse Elemente jener Ebene, bezw. Linie gleichschwer. Es werden dieselben dann consequenterweise ebenfalls homogen genannt.

So kann man z. B. die einzelnen Elemente, in welche eine gerade Eisenbahnschiene mit durchweg gleichen Querschnitten zerlegt gedacht werden kann, in Gruppen zusammenfassen, deren jede eine Reihe von Elementen, die in gerader, zur Längsaxe der Schiene paralleler Linie liegen, enthält. Der Schwerpunkt jedes solchen prismatischen Elements, als welches eine solche Gruppe aufgefasst werden kann, liegt in dem mittleren Querschnitt der Schiene. Den einzelnen Elementen des letzteren kann man folglich die Gewichte jener Elementar-Prismen beilegen. Das Gewicht des ganzen Querschnitts ist dann gleich dem der Schiene, und sein Schwerpunkt fällt mit dem Schwerpunkt derselben zusammen.

Der Begriff materieller ebener Flächen oder gerader Linien, zu dem wir durch obige Betrachtungen gelangt sind, kann leicht auf Flächen oder Linien überhaupt ausgedehnt werden. Man versteht dann darunter nicht mathematische Flächen und Linien, sondern solche, die eine gewisse, jedoch sehr kleine Dicke, bezw. Breite und Dicke besitzen, und daher mit Materie erfüllt gedacht werden können. Ein ebenes oder gekrümmtes Stück Papier oder Blech, ein gerades oder krummes Stück dünnen Drahtes gibt eine annähernde Vorstellung solcher materieller Flächen oder Linien. Sind gleichgrosse Stücke solcher Flächen oder Linien, wie gross oder wie klein diese Stücke auch genommen werden mögen, gleichschwer, so heissen jene wieder homogen.

Die Betrachtung solcher materieller Flächen oder Linien überhaupt ist, wie leicht zu sehen, auch schon desshalb von grosser Wichtigkeit, weil sehr häufig Körper mit Vortheil in solche, anstatt in Körper-Elemente, zerlegt werden. So kann man sich in obigem Beispiele die Eisenbahnschiene sofort in materielle gerade Linien, die zu ihrer Längsaxe parallel sind, zerlegt denken. Die Schwerpunkte derselben liegen, wie sogleich gezeigt werden wird, in deren Mitten, folglich in dem mittleren Querschnitt der Schiene. Man kann sich aber auch die Schiene durch Schnitte, senkrecht auf ihre Längsaxe, in gleichdicke aber sehr dünne Scheiben, also in materielle ebene Flächen zerlegt denken, deren Schwerpunkte alle in einer geraden, zur Längsaxe parallelen Linie liegen, die folglich auch den Schwerpunkt der Schiene enthalten muss.

Wir werden in Folgendem zuerst die Schwerpunkte materieller Linien, dann diejenigen materieller Flächen und dann erst die Schwerpunkte von Körpern aufsuchen. Wie bei den letzteren, so werden wir auch bei den Linien und Flächen immer voraussetzen, dass sie homogen seien.

Schwerpunkt materieller Linien.

§. 66. Die gerade Linie. — Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn denkt man sich von dieser aus nach beiden Enden hin die Linie in lauter gleichlange Elemente getheilt, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt je eines Paares dieser Elemente, die zu beiden Seiten gleichweit von der Mitte abstehen, in dieser. In denselben Punkt muss folglich auch der Schwerpunkt der ganzen Linie fallen.

Wenn die Elemente, in welche wir die materielle Linie getheilt haben, als Angriffspunkte von vertikal abwärts gerichteten Kräften betrachtet werden, die gleich den Gewichten dieser Elemente sind, also durchweg die nämliche Grösse haben, und es wird aus diesen Kräften ein Kräfte- und das dazu gehörige Seilpolygon construirt, so geht letzteres in eine stetige Curve, und zwar in eine Parabel über, deren Axe die Richtung der Kräfte hat. Das ist leicht zu beweisen.

Denken wir uns die materielle gerade Linie AB (Fig. 54b), Taf. IX) in eine endliche Anzahl gleicher Theile getheilt, die wir wieder Elemente nennen wollen, und in den Mitten $e_1, e_2, e_3 \ldots$ derselben vertikal abwärts gerichtete Kräfte wirken, die proportional den Längen der Elemente, also von gleicher Grösse sind und in Fig. 54a) zu einem Kräftepolygon 0 1 2 3... vereinigt wurden. Den Pol C des letzteren nehmen wir der Mitte irgend einer der Kräfte, etwa der n^{ten} die mit $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ bezeichnet ist, senkrecht gegenüberliegend an und zeichnen das Seilpolygon 0 I II III... Dann ist der Knotenpunkt n desselben, in welchem die $(n-1)^{te}$ Seite endigt und die n^{te} beginnt, am tiefsten gelegen. Wir nehmen ihn als Anfangspunkt eines rechtswinkeligen Coordinatensystems, dessen X Axe die Richtung der Kräfte habe, aber mit ihrem positiven Sinn nach aufwärts gekehrt sei, während die positive Y Axe nach der Seite des Anfangs des Seilpolygons und der Linie AB gerichtet sein möge. Legt man dann durch den Knotenpunkt n und die ihm vorausgehenden m, l, k.... Parallele zur Y Axe, welche die durch m, l, k gehenden Kräftelinien in m', l', k' ... schneiden, so geht aus dem Zusammenhang zwischen Kräfte- und Seilpolygon hervor, dass die Dreiecke

$$m\,m'\,n, \quad l\,l'\,m, \quad k\,k'\,l \ldots.$$

in Fig. 54b) den Dreiecken

$$\mathfrak{m}TC, \quad \mathfrak{l}TC, \quad \mathfrak{k}TC \ldots.$$

in Fig. 54a) ähnlich sind. Daraus folgen die Relationen:

$$mm' = \frac{\mathfrak{m}T}{TC} \times m'n; \quad ll' = \frac{\mathfrak{l}T}{TC} \times l'm; \quad kk' = \frac{\mathfrak{k}T}{TC} \times k'l \ldots,$$

oder wenn man die gleichen Längen m'n, l'm, k'l.... mit e bezeichnet und mit H die senkrechte Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie, endlich mit p das Gewicht eines Linienelements:

$$mm' = \frac{1}{2}\frac{p}{H}e; \quad ll' = \frac{3}{2}\frac{p}{H}e; \quad kk' = \frac{5}{2}\frac{p}{H}e \ldots..$$

Bezeichne nun x die Abscisse des q^{ten}, dem n vorausgehenden Knotenpunkts und y dessen Ordinate, so ist

$$\begin{aligned} x &= mm' + ll' + kk' \ldots\ldots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{2q-1}{2}\right)\frac{pe}{H} \\ &= \frac{1}{2}q^2\frac{pe}{H}. \end{aligned}$$

Hierin ist offenbar qe gleich der Abscisse y und qp gleich dem Gewicht eines entsprechend grossen Stückes der materiellen Linie. Bezeichnet daher P das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Horizontalprojektion der letzteren trifft, so ist

$$qp = Py$$

und daher

$$x = \frac{1}{2}y^2\frac{P}{H},$$

oder

$$y^2 = 2\frac{H}{P}x.$$

Diese Gleichung ist gänzlich unabhängig von der Zahl der Stücke, in welche wir die materielle Linie theilen. Sie gilt also auch für den Fall, dass jene Stücke wirkliche Elemente

werden und zeigt, dass alsdann das Seilpolygon in eine Parabel übergeht, deren Axe die nämliche Richtung wie die Kräfte hat.

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Parabel, dass sich irgend zwei Tangenten an dieselbe in einem Punkte schneiden, der so liegt, dass die durch ihn zur Axe der Parabel gezogene Parallele die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Tangenten halbirt. Die Tangenten in denjenigen Punkten A′ und B′ der Parabel A′n B′, wo diese die Kräftelinien schneidet, welche durch die Endpunkte A und B der materiellen Linie gezogen wurden, sind die äussersten Seiten des Seilpolygons, das mit jener Parabel zusammenfällt. Durch ihren Schnittpunkt α geht folglich die Resultante der sämmtlichen, auf die Linie wirkenden Schwerkräfte hindurch. Dieselbe schneidet die Verbindungslinie A′B′ und folglich auch die materielle Gerade AB in der Mitte. Dies ist ein neuer und im Sinne der graphischen Statik direkter Beweis für den Satz, dass der Schwerpunkt einer materiellen geraden Linie in deren Mitte liegt.

Das Vorhergehende lässt sich ohne weiters auf den Fall ausdehnen, wo über einem horizontalen Träger eine Last gleichförmig vertheilt ist. Das Seilpolygon aus letzterer wird eine Parabel. Das Eigengewicht des Trägers kann, wenn es pro Längeneinheit durch seine ganze Länge hindurch constant ist, entweder mit jener gleichförmig vertheilten Last vereinigt, oder für sich behandelt werden. In letzterem Fall ist das ihm zugehörige Seilpolygon ebenfalls eine Parabel.

§. 67. Die gebrochene gerade Linie. — Der Schwerpunkt einer gebrochenen Linie wird gefunden, indem man sich in dem Mittelpunkt jedes einzelnen Stücks eine vertikal abwärts gerichtete Kraft, das Gewicht dieses Stückes, wirkend denkt von einer, der Länge desselben proportionalen Grösse. Der Mittelpunkt der so erhaltenen parallelen Kräfte ist der gesuchte Schwerpunkt. Zu seiner Construktion sind also zwei Kräfte- und zugehörige Seilpolygone erforderlich, vorausgesetzt, dass die gebrochene Linie in einer Ebene liegt; ist dies nicht der Fall, so müssen drei solche Polygonenpaare gezeichnet werden.

In dem speziellen Fall, wo die gebrochene Linie ABCD... (Fig. 55, Taf. IX) eben ist und aus einer beliebigen Anzahl gleichlanger Stücke besteht, die unter gleichen Winkeln ABC, BCD... aneinander stossen, so dass ihnen ein Kreis einbeschrieben werden kann, der sie in ihren Mittel- oder Schwerpunkten berührt, kann der Schwerpunkt der ganzen Linienverbindung auf einfacherem Wege, ohne Zuhülfenahme der Kräfte- und Seilpolygone construirt werden. Es verhilft uns dazu hauptsächlich der Momentensatz, der im §. 60 nachgewiesen wurde. Zunächst ist klar, dass die in Rede stehende gebrochene Linie immer eine Symmetrieaxe hat. Dies ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes O des einbeschriebenen Kreises entweder mit dem Mittelpunkt s_m des mittleren Linienstückes, wenn, wie in der Figur, die Anzahl derselben ungerade ist, oder mit der Ecke, zu deren beiden Seiten gleichviel Stücke liegen, wenn die Anzahl derselben gerade ist. Auf dieser Symmetrieaxe liegen die gemeinschaftlichen Schwerpunkte je zweier Linienstücke, die zu beiden Seiten derselben gleiche Lage haben. Sie ist folglich ein geometrischer Ort für den gesuchten Schwerpunkt.

Behufs Anwendung des oben erwähnten Satzes nehmen wir als Momentenaxe (s. §. 63) irgend eine durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises in der Ebene der Figur gezogene Gerade XX. Die Länge der einzelnen Linienstücke bezeichnen wir mit λ und mit demselben Buchstaben die ihnen proportionalen Schwerkräfte, die wir uns in den Schwerpunkten s_1, s_2, s_3 ... der Stücke wirken denken müssen. Die senkrecht gemessenen Entfernungen dieser Schwerpunkte

von der Linie XX seien e_1, e_2, e_3 ... Dann ist das Gesammtmoment jener Schwerkräfte in Bezug auf die Momentenaxe gleich der algebraischen Summe

$$\Sigma \lambda e.$$

Die Resultante jener Kräfte ist proportional mit der Gesammtlänge l der gebrochenen Linie und werde wie diese bezeichnet. Ist dann die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes S von der Linie XX gleich e_0, so muss

$$l e_0 = \Sigma \lambda e$$

sein. Nun gilt für irgend ein Linienstück CD, dessen Schwerpunkt s die Entfernung e von der Momentenaxe hat, und dessen Projektion auf die letztere mit λ' bezeichnet werde, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CDD' und Oss' die Proportion

$$\lambda : \lambda' = r : e,$$

unter r den Radius des einbeschriebenen Kreises verstanden. Daraus folgt

$$\lambda e = \lambda' r,$$

und dies in obige Momentengleichung substituirt, ergibt

$$l e_0 = \Sigma \lambda' r = r \Sigma \lambda' = r l',$$

wo l' die Projektion A'M' der ganzen gebrochenen Linie auf die Momentenaxe bezeichnet. Die Entfernung e_0 des gesuchten Schwerpunktes von der Linie XX und damit der Schwerpunkt selbst kann folglich durch Construktion der Proportion

$$l : l' = r : e_0$$

gefunden werden.

Zeichnet man zu diesem Behufe ein rechtwinkeliges Dreieck ALL', dessen eine Kathete in der Linie XX liegt, während seine andere LL' gleich dem Radius r des Kreises und seine Hypotenuse A'L gleich der Länge l der gebrochenen Linie ist, und trägt man auf letzterer ein Stück A'U = A'M' gleich der Projektion l' auf, so ist die vom Endpunkt U dieses Stückes auf XX gefällte Senkrechte UU' gleich der gesuchten Entfernung e_0. Eine durch U zur Momentenaxe XX gezogene Parallele schneidet also die Symmetrieaxe Os_m in dem gesuchten Schwerpunkt S.

§. 68. **Der Kreisbogen.** — Vorstehende Construktion ist von der Anzahl und Länge der Seiten, aus denen die betrachtete gebrochene Linie besteht, ganz unabhängig. Sie kann desshalb unmittelbar auch zur Aufsuchung des Schwerpunktes eines Kreisbogens angewendet werden, der als Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet werden kann wenn man nur unter l die Länge dieses Bogens, unter l' seine Projektion auf irgend eine, durch den Mittelpunkt des Kreises gezogene Momentenaxe und unter r den Radius des Kreises selbst versteht.

Etwas vereinfacht wird die Construktion dadurch, dass man sich als Momentenaxe die durch den Mittelpunkt O gezogene Senkrechte auf dem Radius Os_m (Fig. 56, Taf. IX) genommen denkt, welcher den Bogen halbirt, und auf dem der Schwerpunkt S liegt. Dann wird die Sehne AA' des Bogens gleich seiner Projektion l' auf jene Momentenaxe und die Entfernung OS des gesuchten Schwerpunktes vom Kreismittelpunkt gleich e_0. Streckt man daher auf die durch den Bogenmittelpunkt s_m gezogenen Tangente auf beiden Seiten von s_m die halbe Bogenlänge $s_m B = s_m A$ und $s_m B' = s_m A'$ aus, zieht dann die Linien OB und OB' und durch die Endpunkte A, A' des Bogens Linien parallel zum halbirenden Radius Os_m, welche jene in den Punkten C und C' treffen, so schneidet die Verbindungslinie CC' dieser letzteren Punkte den halbirenden Radius Os_m im gesuchten Schwerpunkt S. Denn es verhält sich

$$BB' : CC' = Os_m : OS$$

oder

$$l : l' = r : e_0.$$

Man kann auch, wie in derselben Fig. 56 geschehen, die durch den Bogenmittelpunkt gezogene Tangente vom Kreismittelpunkt aus mit einem Radius OL gleich der Bogenlänge l durchschneiden und auf die Verbindungslinie OL von O aus ein Stück OU gleich der Sehnenlänge AA′ auftragen. Die Parallele zur Sehne AA′, welche durch den Endpunkt U des letzteren Stückes gezogen wird, schneidet den halbirenden Radius Os_m im gesuchten Schwerpunkt. Denn es ist wieder:

$$OL : OU = Os_m : OS$$

oder

$$l : l' = r : e_0.$$

§. 69. **Die krumme Linie im Allgemeinen.** — Um den Schwerpunkt irgend einer krummen Linie zu finden, theilt man dieselbe in eine so grosse Anzahl gleicher Stückchen, dass man jedes derselben als gerade betrachten kann. An den Mittelpunkten dieser Stückchen denkt man sich dann vertikal abwärts gerichtete Kräfte, deren Gewichte wirken, und sucht auf die bekannte Weise, mittelst Construktion der nöthigen Kräfte- und Seilpolygone, den Mittelpunkt jener parallelen Kräfte.

Schwerpunkt ebener Figuren.

§. 70. **Das Dreieck.** — Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ABC (Fig. 57, Taf. IX) wird gefunden, indem man dieselbe durch Schnitte, parallel zu einer Seite AB, in sehr dünne Lamellen wie $\alpha\beta$ z. B. zerlegt, welche als materielle gerade Linien betrachtet werden können. Die Schwerpunkte dieser Lamellen liegen alle auf der geraden Linie, welche die Mitte D jener Seite mit der gegenüberliegenden Ecke C verbindet. Diese ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Dreiecks. Zwei andere solche geometrische Oerter sind aus denselben Gründen die Verbindungslinien der Mitten der beiden anderen Dreieckseiten mit den ihnen gegenüberliegenden Ecken. Die drei Transversalen schneiden sich, wie sich auch geometrisch beweisen lässt, in einem Punkt S, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Dieser theilt nach einem bekannten geometrischen Satz jede derselben in dem Verhältniss von 1 zu 2 so, dass das kleinere Stück zunächst der Seite liegt, welche die Transversale halbirt. Daraus folgt leicht, dass das ganze Gewicht Q des Dreiecks, das man sich in seinem Schwerpunkt wirken denken darf, auf seine drei Ecken so vertheilt werden kann, dass auf jedes derselben gleichviel, also $\frac{1}{3}$ Q, als dort angreifende Componente jenes ganzen Gewichtes kommt. Bezieht man dann diese drei Componenten und ihre Resultante auf eine beliebige Momentenebene und nennt a, b, c und s die Entfernungen der drei Ecken des Dreiecks und seines Schwerpunktes von dieser Ebene, so ist nach dem Momentensatz

$$Qs = \tfrac{1}{3}Qa + \tfrac{1}{3}Qb + \tfrac{1}{3}Qc$$

oder

$$s = \tfrac{1}{3}(a + b + c).$$

§. 71. **Das Parallelogramm.** — Den Schwerpunkt eines Parallelogramms findet man in ähnlicher Weise wie den des Dreiecks durch Zerschneiden in Lamellen, die parallel zu dem einen oder anderen Paar der Parallelseiten sind, oder auch, indem man das Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Im ersten Fall ergibt sich, dass der gesuchte Schwerpunkt in der Mitte jeder der Linien liegt, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüberliegenden

Seiten miteinander verbinden; im zweiten Fall findet er sich im Mittelpunkt jeder der beiden Diagonalen gelegen. Es versteht sich von selbst und lässt sich auch geometrisch leicht beweisen, dass sich alle diese Linien in einem und demselben Punkt, dem Schwerpunkt schneiden.

§. 72. **Das Trapez.** — Um den Schwerpunkt eines Trapezes ABCD (Fig. 58, Taf. IX) zu finden, denkt man sich dasselbe zunächst wieder in der Richtung seiner Parallelseiten in sehr dünne Lamellen zerschnitten, deren Schwerpunkte sämmtlich auf der Verbindungslinie EF der Mitten jener Parallelseiten gelegen sind. Diese Linie ist desshalb auch ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Trapezes. Hierauf zerlege man das letztere durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC, ACD, deren Schwerpunkte nach §. 70 gefundene S_1 und S_2 seien. Der Schwerpunkt des Trapezes liegt dann in der Verbindungslinie $S_1 S_2$ dieser beiden Punkte und folglich in dem Durchschnittspunkt S derselben mit dem vorhin schon gefundenen geometrischen Ort EF.

Es kann leicht ermittelt werden, in welchem Verhältniss der Schwerpunkt S die Mittellinie EF theilt. Die Schwerpunkte S_1 und S_2 liegen in den Linien EC, AF, welche die Mitten der Grundlinien der betreffenden Dreiecke mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden, und theilen diese Verbindungslinien in dem Verhältniss von 1:2 so, dass das kleinere Stück zunächst der halbirten Seite liegt. Zieht man daher von diesen Schwerpunkten Linien in der Richtung der Parallelseiten des Trapezes nach der Mittellinie EF, so wird letztere hiedurch in drei gleiche Theile FG, GH und HE getheilt. Der mittlere dieser drei Theile, GH, wird ferner vom Schwerpunkt S in demselben Verhältniss getheilt, wie die Verbindungslinie $S_1 S_2$ der Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD, nämlich im umgekehrten Verhältniss der Flächeninhalte jener Dreiecke oder, da dieselben gleiche Höhe haben, im umgekehrten Verhältniss ihrer Grundlinien AB und CD. Bezeichnen wir dieselben kürzer mit a und b und die Linie EF mit h, so ist folglich

$$HS = \frac{1}{3} h \frac{b}{a+b} \text{ und } SG = \frac{1}{3} h \frac{a}{a+b}$$

Hiernach ist

$$ES = \frac{1}{3} h + \frac{1}{3} h \frac{b}{a+b} = \frac{1}{3} h \frac{a+2b}{a+b},$$
$$SF = \frac{1}{3} h + \frac{1}{3} h \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} h \frac{2a+b}{a+b}.$$

EF wird also durch S in dem Verhältniss von $a+2b$ zu $2a+b$, oder in dem Verhältniss von $\frac{1}{2}a+b$ zu $a+\frac{1}{2}b$ getheilt. Diese Theilung kann aber sehr leicht direkt ausgeführt und dadurch der Schwerpunkt S des Trapezes gefunden werden, ohne dass man erst die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke ABC und ACD zu suchen braucht. Verlängert man nämlich jede der beiden Parallelseiten um die andere, aber nach entgegengesetzten Richtungen hin, also AB nach rechts hin um $BK = CD = b$ und CD nach links hin um $DJ = AB = a$, so schneidet die Verbindungslinie JK der Endpunkte dieser Verlängerungen die Mittellinie EF in dem Punkt S. In der That verhält sich in den beiden ähnlichen Dreiecken EKS und SFJ

$$\begin{aligned} ES : SF &= EK : FJ \\ &= \frac{1}{2}a + b : a + \frac{1}{2}b \\ &= a + 2b : 2a + b. \end{aligned}$$

§. 73. **Das unregelmässige Viereck.** — Um den Schwerpunkt eines unregelmässigen Vierecks ABCD (Fig. 59, Taf. IX) zu finden, theile man dasselbe durch eine Diagonale BD in

zwei Dreiecke ABD, DBC, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 auf bekannte Weise gefunden werden. Sie liegen in den Linien AO, OC, welche die Mitte O der Diagonale mit den gegenüberliegenden Dreiecks-Ecken verbinden, und theilen diese Linien in dem Verhältniss von 1:2. Der gesuchte Schwerpunkt liegt in der Verbindungslinie $S_1 S_2$ jener beiden Schwerpunkte. Einen zweiten geometrischen Ort für denselben könnte man offenbar auf ganz ähnliche Weise finden, wenn man das Viereck durch seine zweite Diagonale AC in zwei Dreiecke theilen und deren Schwerpunkte miteinander verbinden würde. Aber es ist einfacher, den Schwerpunkt S des Vierecks dadurch zu finden, dass man die Linie $S_1 S_2$ nach richtigem Verhältniss theilt. Dieses Verhältniss ist leicht zu finden; da man sich in den Punkten S_1 und S_2 Kräfte angebracht denken muss, gleich den Gewichten der Dreiecke ABD und DBC, so theilt der Angriffspunkt der Resultante die Verbindungslinie jener Angriffspunkte im umgekehrten Verhältniss dieser Gewichte oder im umgekehrten Verhältniss der Flächeninhalte der Dreiecke ABD und DBC. Aber diese Dreiecke haben die gleiche Grundlinie BD; ihre Flächen verhalten sich also wie ihre Höhen, oder wie die Abschnitte AE und EC der zweiten Diagonale. Nun ist $S_1 S_2$ zu dieser zweiten Diagonale parallel, vertauscht man desshalb jene Abschnitte miteinander, so dass AE_1 gleich EC und $E_1 C$ gleich AE wird, so schneidet die Verbindungslinie $E_1 O$ die Linie $S_1 S_2$ in dem richtigen Verhältniss und der Schnittpunkt S ist der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks.

Dieser letztere theilt, wie leicht ersichtlich, die Verbindungslinie $E_1 O$ auch in dem Verhältniss von 1:2. Man kann folglich den Schwerpunkt des Vierecks auch dadurch finden, dass man den Mittelpunkt O der einen Diagonale mit dem Punkt E_1 der anderen Diagonale, den man durch Vertauschen ihrer Abschnitte erhält, verbindet und die Verbindungslinie in dem Verhältniss von 1:2 so theilt, dass der kleinere Theil der halbirten Diagonale anliegt. Das Gleiche gilt natürlich für die Verbindungslinie des Mittelpunktes O_1 der zweiten Diagonale mit dem Punkt E_2 auf der ersten, den man durch Vertauschen von deren Abschnitten erhält. Da die Mittelpunkte O, O_1 der Diagonalen zugleich Halbirungspunkte der Strecken EE_1 und EE_2 auf denselben sind, so folgt hieraus: Der Schwerpunkt des unregelmässigen Vierecks fällt zusammen mit dem Schwerpunkt des Dreiecks, dessen drei Ecken der Schnittpunkt E der Diagonalen und die beiden Punkte E_1 und E_2 derselben sind, welche man durch Vertauschen ihrer Abschnitte erhält.

Hieraus geht nun wieder hervor, dass die Verbindungslinie ES, verlängert, die Seite $E_1 E_2$ jenes Dreiecks in dem Punkte O_2 halbiren muss, während die Linie EO_2 selbst in S in dem Verhältniss von 1:2 getheilt ist. Wird folglich CD parallel zu AB, d. h. geht das unregelmässige Viereck in ein Trapez über, in welchem Falle auch $E_1 E_2$ parallel zu jenen Parallelseiten wird, so liegen die Halbirungspunkte der letzteren, derjenige der Strecke $E_1 E_2$, der Durchschnittspunkt der Diagonalen und der Schwerpunkt des Trapezes sämmtlich in einer geraden Linie, und zwar theilt der letztere Punkt die Strecke zwischen den vor ihm genannten beiden Punkten E und O_2 im Verhältniss von 1:2 so, dass der kleinere Theil dem letzten Punkt O_2 anliegt. Hieraus lässt sich auf einem anderen Wege, als im vorigen §. geschehen, ebenfalls das Verhältniss herleiten, in welchem der Schwerpunkt des Trapezes die Verbindungslinie der Mittelpunkte seiner Parallelseiten theilt.

§. 74. Die Vielecke im Allgemeinen. — Der Schwerpunkt eines Polygons mit mehr als vier Seiten wird erhalten, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Vierecke oder Dreiecke zerlegt, die Schwerpunkte derselben sucht und die in denselben wirkenden Kräfte, welche den Flächeninhalten der betreffenden Vier- oder Dreiecke proportional sind, durch Kräfte- und Seilpolygone vereinigt.

§. 75. **Der Kreissektor.** — Den Schwerpunkt eines Kreissektors OACB (Fig. 60, Taf. IX) findet man, indem man sich denselben in sektorenförmige Elemente $O\alpha\beta$ zerschnitten denkt, welche auf den Elementen $\alpha\beta$ des Bogens ACB stehen. Diese sektorenförmigen Elemente können dann als Dreiecke betrachtet werden, deren Schwerpunkte die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Bögen mit dem Kreismittelpunkt im Verhältniss von 1:2 theilen; alle diese Schwerpunkte liegen auf dem Bogen A'C'B', der zwischen denselben Endradien um denselben Mittelpunkt wie der ACB mit einem Radius gezogen wurde, der $\frac{2}{3}$ von dem des gegebenen Kreissektors ist. Dieser Bogen kann folglich als materielle Linie betrachtet werden, deren Elemente so schwer wie die zugehörigen sektorenförmigen Elemente des Sektors sind, und deren Schwerpunkt mit dem des gegebenen Sektors zusammenfällt. Derselbe wird also erhalten, indem man auf der Tangente, welche durch den Mittelpunkt C' des Bogens A'C'B' gezogen wurde, den halben Bogen C'B', oder auch auf der durch den Halbirungspunkt C des Bogens ACB gezogenen Tangente den halben Bogen CB gleich CT ausstreckt und OT zieht. Wenn man dann durch den Endpunkt B' des Bogens A'C'B' eine Parallele zum mittleren Radius OC legt, welche jene Verbindungslinie in D trifft, so schneidet die durch letzteren Punkt zur Sehne AB gezogene Parallele den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt S des Sektors.

§. 76. **Der Kreisabschnitt** (Fig. 60, Taf. IX). — Der Sektor OACB, dessen Schwerpunkt S wir soeben finden lernten, kann als Summe des Abschnitts ACB und des Dreiecks ABO betrachtet werden. Der Schwerpunkt S_2 des letzteren liegt, wie leicht ersichtlich, im Durchschnitt des mittleren Radius OC mit der Sehne A'B' des Bogens A'C'B', der, wie im vorigen §. gezeigt, bei Construktion des Schwerpunkts des Sektors mit einem Radius gleich $\frac{2}{3}$ von dem des letzteren gezogen werden musste. Der Schwerpunkt S_1 des Abschnittes ACB muss offenbar auf dem mittleren Radius und zwar so liegen, dass der Schwerpunkt des Sektors die Verbindungslinie S_1S_2 im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte des Abschnittes ACB und des Dreieckes ABO theilt, d. h. es muss sich verhalten

$$S_1S : SS_2 = \triangle ABO : \text{Abschn. } ACB.$$

Daraus folgt die andere Proportion:

$$S_1S : S_1S_2 = \triangle ABO : \text{Sect. } OACB$$
$$= MH : \text{arc. } CB.$$

Zieht man daher durch die bekannten Schwerpunkte S und S_2 zwei beliebige Parallele in gleichem Sinne und trägt auf die eine von S_2 aus das Stück $S_2E = \text{arc. } CB = CT$ auf und auf die andere das Stück $SF = MH$, so trifft die Verbindungslinie der Endpunkte E, F dieser Stücke den mittleren Radius in S_1, dem Schwerpunkt des Abschnitts.

§. 77. **Ringstück des Ausschnittes zwischen zwei concentrischen Kreisen.** — In ähnlicher Weise wie eben den Schwerpunkt eines Kreisabschnittes kann man den des Ringstücks DACBEF (Fig. 61, Taf. IX) des Ausschnittes zwischen zwei concentrischen Kreisen bestimmen. Dasselbe kann als Differenz der beiden Kreisausschnitte OACB und ODFE betrachtet werden. Deren Schwerpunkte S und S_2 werden auf die im §. 75 gelehrte Weise mittelst der Kreisbogen A'B' und D'E' gefunden, die mit Radien gleich $\frac{2}{3}$ von denjenigen der betr. Ausschnitte gezogen werden. Der Schwerpunkt S_1 des Ringstückes muss dann auf dem mittleren Radius OC so liegen, dass sich verhält

$$S_1S : SS_2 = \text{Sect. } ODFE : \text{Ring } DABE,$$

woraus die anderen Proportionen folgen:

$$S_1 S : S_1 S_2 = \text{Sect. } ODFE : \text{Sect. } OACB$$
$$= r'^2 : r^2,$$

wenn r und r' die Radien der concentrischen Kreise sind, welche das Ringstück begrenzen. Damit letztere Proportion construirt werden kann, schreiben wir sie so:

$$S_1 S : S_1 S_2 = x : r,$$

wo
$$x = \frac{r'^2}{r}$$

ist und folglich aus der Proportion

$$r\ r' = r' : x$$

gefunden wird. Um letzteres auf graphischem Wege zu bewerkstelligen, darf man nur AF ziehen und durch D eine Parallele dazu, bis der mittlere Radius in G geschnitten wird. OG ist dann jenem x gleich, denn in der That verhält sich

$$OA : OD = OF : OG$$
$$r : r' = r' : x.$$

Zieht man nun durch die beiden bekannten Schwerpunkte S und S_2 nach derselben Seite hin zwei Parallellinien und trägt auf dieselben von jenen Punkten aus bezw. die Strecken $SJ = x = OG$ und $S_2 H = r = OC$ auf, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte J und H derselben den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt des Ringstücks.

§. 78. Das Parabelsegment und das Parabeldreieck. — Der Schwerpunkt eines Parabel-Segmentes BAC (Fig. 62, Taf. IX) mit beliebiger begrenzender Sehne BC wird gefunden, indem man sich dasselbe durch Schnitte, parallel zu jener Sehne, in Lamellen $\beta\gamma$ von durchweg gleicher, aber sehr geringer Breite getheilt denkt. Die Schwerpunkte aller dieser, als materielle Linie zu betrachtenden Lamellen liegen in ihren Mitten, also in dem zur Sehne BC conjugirten Durchmesser AX. Dieser ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Parabelsegments.

Um die Lage desselben in jenem Durchmesser zu finden, bedienen wir uns des Momentensatzes. Wir denken uns in den Schwerpunkten jener Lamellen parallele Kräfte wirken, welche den Gewichten dieser Streifen, also ihren Längen 2y proportional sind. Die Momente dieser Kräfte beziehen wir auf die in A an die Parabel gelegte, zur Sehne BC parallele Tangente MM als Momentenaxe und messen die Entfernungen x der Angriffspunkte von dieser in der Richtung des conjugirten Durchmessers AX. Bezeichnet dann x_0 die in derselben Richtung gemessene Entfernung des Angriffspunkts der Resultante, also des gesuchten Schwerpunktes von der Momentenaxe, so muss nach dem Momentensatze

$$x_0 \Sigma 2y = \Sigma 2xy$$

sein, woraus folgt:

$$x_0 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y}.$$

Nun besteht zwischen den Grössen x und y bei der Parabel die bekannte Relation

$$y = \sqrt{2px},$$

wo p eine constante Grösse ist. Setzt man diesen Werth für y in obige Gleichung ein, so kommt

$$x_0 = \frac{\Sigma \sqrt{x^3}}{\Sigma \sqrt{x}}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite dieser Gleichung findet sich nach den Regeln der Analysis als $\frac{3}{5} l$, wo l die Länge AD des Durchmessers AX zwischen der Parabel und der Sehne BC bezeichnet. Wenn man also diese Strecke AD in dem Verhältniss von 2 : 3 so theilt, dass das

grössere Stück zunächst der Parabel liegt, so ist der Theilungspunkt der Schwerpunkt des Parabelsegments.

Die Schwerpunkte S' und S'' der Halbsegmente ADC und ADB haben, wie leicht aus Obigem hervorgeht, dieselbe Entfernung von der Momentenaxe MM, wie der Schwerpunkt S. Sie liegen also in der durch S zu BC gezogenen Parallelen, und zwar zu beiden Seiten des Durchmessers AX gleichweit von diesem entfernt. Wie gross diese Entfernung ist, finden wir wieder leicht mittelst des Momentensatzes, wenn wir nur jetzt AX als Momentenaxe nehmen und die Entfernungen in der Richtung von BC messen. Denken wir uns dann in den Mittelpunkten der Halblamellen δy parallele Kräfte wirken, deren Grösse der Länge y der Halblamellen proportional oder gleich ist, und bezeichnen wir mit y_0 die in jener Richtung gemessene Entfernung des gesuchten Schwerpunkts von der Momentenaxe AX, so ergibt der Momentensatz die Relation

$$y_0 \Sigma y = \Sigma \tfrac{1}{2} y^2,$$

woraus

$$y_0 = \tfrac{1}{2} \frac{\Sigma y^2}{\Sigma y}.$$

Nach der bereits oben citirten Relation zwischen den Grössen y und x bei der Parabel geht diese Gleichung über in

$$y_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2p}\,\frac{\Sigma x}{\Sigma\sqrt{x}}.$$

Der Quotient aus den beiden Summen auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nach den Regeln der Analysis gleich $\tfrac{3}{4}\sqrt{l}$; folglich wird

$$y_0 = \frac{3}{8}\sqrt{2pl}$$

oder, wenn mit h die halbe begrenzende Sehne BC bezeichnet wird,

$$y_0 = \frac{3}{8}\,h.$$

Die in den Endpunkten der Sehne BC an die Parabel gezogenen Tangenten schneiden sich in einem Punkte E des zur Sehne conjugirten Durchmessers. Dieser Punkt liegt so, dass die Strecke zwischen ihm und dem Mittelpunkt D der Sehne vom Punkte A halbirt wird. Die Fläche des von jenen Tangenten und dem Parabelbogen gebildeten Ausschnittes BECA, P a r a b e l d r e i e c k genannt, ist halb so gross als die des Parabelsegmentes BAC, mit welchem zusammen er das Dreieck BEC bildet. Der Schwerpunkt O des letzteren liegt, wie derjenige des Parabelsegmentes, in der Linie ED und zwar um $\tfrac{1}{3}$ ED oder $\tfrac{2}{3}$ l von D entfernt. Desshalb liegt auch der Schwerpunkt S_1 des Parabeldreiecks in der Linie ED, und denkt man sich die Sehne BC als Momentenaxe genommen und die Entfernungen in der Richtung des conjugirten Durchmessers gemessen, so muss nach dem Momentensatz die Relation stattfinden:

$$SD \times \text{Segm. } BAC + S_1 D \times \text{Ausschn. } BECA = OD \times \triangle\, BEC$$

oder

$$\tfrac{2}{5} l \times 2 + S_1 D \times 1 = \tfrac{2}{3} l \times 3,$$

woraus

$$S_1 D = \tfrac{6}{5} l$$

und daher

$$S_1 A = \tfrac{1}{5} l.$$

Die Schwerpunkte S_1' und S_1'' der Halbausschnitte EAC und EAB liegen, wie leicht ersichtlich, in der zu BC durch S_1 gezogenen Parallelen, zu beiden Seiten des conjugirten Durchmessers

gleichweit von diesem entfernt. Nimmt man EX als Momentenlinie und misst die Entfernungen in der Richtung der Sehne BC, so beträgt diejenige des Schwerpunktes des Dreiecks EDC, welches die Summe des Halbausschnitts EAC und des Halbsegments ADC ist, $\frac{1}{3}$ h. Folglich ist nach dem Momentensatz

$$S'S \times \text{Halbsegm.} ADC + S_1'S_1 \times \text{Halbausschn.} EAC = \tfrac{1}{3}h \times \triangle EDC$$

oder

$$\tfrac{3}{8}h \times 2 + S_1'S_1 \times 1 = \tfrac{1}{3}h \times 3,$$

woraus

$$S_1'S_1 = \tfrac{1}{4}h.$$

Die vorstehenden, auf die Parabel bezüglichen Resultate sind schon wegen ihrer Einfachheit von besonderem Interesse; sie sind aber auch von praktischer Wichtigkeit desshalb, weil sehr viele in den Anwendungen vorkommende krumme Linien und selbst noch Kreisbögen mit grosser Annäherung als Parabelbögen betrachtet und die von ihnen begrenzten Flächen mit Vortheil wie die obigen Parabelab- und Ausschnitte behandelt werden können.

§. 79. Unregelmässige ebene Figur; Schwerpunkt eines Schienenprofils als erstes Beispiel. — Der Schwerpunkt einer unregelmässigen ebenen Figur wird gefunden, indem man dieselbe durch Parallellinien in Lamellen zerlegt, die mit hinreichender Annäherung als Trapeze betrachtet werden dürfen. Die Breite dieser Lamellen wird in der Regel so klein werden müssen, dass man ohne merklichen Fehler ihren Schwerpunkt in der Mitte der Linie wird annehmen können, welche die Parallelseiten halbirt. Sollte dies nicht zulässig sein, weil jene Breite zu gross und die Neigung der nicht parallelen Seiten gegeneinander zu stark ist, so kann man den Schwerpunkt des betr. Trapezes leicht nach §. 72 finden. An diesen Schwerpunkten müssen nun parallele Kräfte wirkend gedacht werden, deren Grössen proportional oder gleich den Flächeninhalten der betr. Trapeze sind. Um die Grösse dieser Kräfte zu erhalten, verwandelt man die Trapeze mit Hülfe bekannter geometrischer Sätze in Rechtecke mit durchweg gleicher Basis. Die Höhen dieser Rechtecke sind dann ihren Flächeninhalten, also den Flächen der Trapeze proportional. Auf geeignetem Massstab gemessen, können sie sogar gleich diesen Flächen gesetzt werden, und man sagt dann, man habe die letzteren auf eine gemeinschaftliche Flächenbasis reducirt. Ist z. B. die Längeneinheit der Centimeter und wird als Flächenbasis auch ein Centimeter genommen, so repräsentirt je ein Centimeter des Längenmassstabes, wenn die reducirten Flächen mit ihm gemessen werden, einen Quadratcentimeter. Wird dagegen, unter sonst gleichen Verhältnissen, eine Länge von 4 Centimeter als Flächenbasis genommen, so repräsentirt jeder Centimeter der reducirten Flächen, mit dem gewöhnlichen Längenmassstab gemessen, eine Fläche von 4 Quadratcentimetern.

Nachdem man die so reducirten Flächen der Trapeze in deren Schwerpunkten als Parallelkräfte angebracht hat, muss man sie noch durch Kräfte- und Seilpolygon vereinigen. Wenn bereits ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt bekannt ist, wenn z. B. die Figur eine Symmetrieaxe hat, in der stets der Schwerpunkt liegen muss, so reicht ein Kräfte- mit zugehörigem Seilpolygon aus. Ausserdem müssen zwei solcher Polygonenpaare construirt werden.

Als Beispiel haben wir in Fig. 63, Taf X die Aufgabe durchgeführt, den Schwerpunkt eines Eisenbahnschienenprofils (ähnlich dem Normalprofil der königl. bayer. Staatseisenbahnen) zu finden. Dasselbe, in der Figur in natürlicher Grösse gezeichnet, hat eine Symmetrieaxe, in der folglich der Schwerpunkt liegen muss. Wir haben es durch Parallellinien senkrecht zu jener Symmetrieaxe in 19 Lamellen zerlegt, die mit Ausnahme des obersten Stückes, am Kopfe, sämmtlich als Trapeze betrachtet werden dürfen. Jenes oberste Stück haben wir als Parabel-

segment behandelt. Die Schwerpunkte der Trapeze konnten wir alle in der Mitte der die Parallelseiten halbirenden Linie annehmen, nur bei der, von oben herab gezählten, 15ten Lamelle wurde wegen der starken Neigung der nicht parallelen Seiten gegeneinander der Schwerpunkt nach §. 72 construirt. Der mit (1) bezeichnete Schwerpunkt der ersten Lamelle, des Parabelsegments, wurde so gefunden wie in §. 78 angegeben. Die Schwerpunkte der Lamellen sind mit den von oben nach unten fortlaufenden Ziffern (1), (2), (3) ... (19) bezeichnet. An ihnen sind die auf eine gemeinschaftliche Flächenbasis reducirten Flächeninhalte der Lamellen als Parallelkräfte anzubringen. Als Flächenbasis haben wir die Länge von 4 Centimeter gewählt und die Reduktion, zunächst der Trapeze, auf sie in folgender Weise vorgenommen.

Es bezeichne h die längs der Symmetrieaxe zu messende Höhe des zu reducirenden Trapezes und m die Länge der Linie, welche mitten zwischen den Parallelseiten zu diesen parallel gezogen wird, die also bei allen Trapezen, ausgenommen das mit Nr. 15 bezeichnete, durch den Schwerpunkt geht. Dann ist mh der Inhalt des Trapezes, und bezeichnet also a die Flächenbasis und x die reducirte Fläche, so muss

$$mh = ax$$

sein und kann daher x aus der Proportion

$$a : m = h : x$$

oder aus der

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}h : x$$

gefunden werden. Diese Proportion ist leicht zu construiren. Man zieht durch den einen Endpunkt e (für Trapez Nr. 7 z. B.) der Linie, welche mitten zwischen den Parallelseiten parallel zu diesen gezogen ist, eine Parallele zur Symmetrieaxe. Auf derselben trägt man von ihrem Schnittpunkt f mit der oberen Parallelseite aus den vierten Theil der Basis, in unserer Figur also 1 Centimeter, ab und verbindet den Endpunkt g mit der Mitte i der oberen Parallelseite. Die Verbindungslinie schneidet jene mittlere Parallele in einem Punkt k, dessen Entfernung $k(7)$ von der Mitte derselben gleich der gesuchten reducirten Fläche ist. Geben wir folglich den in den Schwerpunkten wirkenden Parallelkräften eine Richtung senkrecht zur Symmetrieaxe, so erhalten wir durch obige Construktion die reducirten Flächen als jene Kräfte sogleich an ihre Stelle getragen, vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt des Trapezes in der Mitte der die Parallelseiten halbirenden Linie angenommen werden durfte. Andernfalls hat man, wie beim Trapez Nr. 15, die gefundene reducirte Fläche noch auf die durch den Schwerpunkt zu den Parallelseiten gezogene Parallele zu übertragen, was mit Hülfe einer einzigen Parallelen zur Symmetrieaxe leicht geschehen kann.

Die Reduktion des Parabelsegments kann in ähnlicher Weise folgendermassen vorgenommen werden. Es bezeichne wieder h seine Höhe und s seine Sehne, so ist $\frac{2}{3}hs$ seine Fläche, und es muss daher die Gleichung

$$\frac{2}{3}hs = ax$$

oder die Proportion

$$a : s = \frac{2}{3}h : x,$$

welche identisch ist mit der

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}h : x,$$

erfüllt werden, wenn x die gesuchte reducirte Fläche bedeutet. Um dieses x zu construiren, wird man durch den einen Endpunkt e' der Sehne eine Parallele zur Symmetrieaxe ziehen und deren Schnittpunkt f' mit der durch den Scheitel der Parabel zur Symmetrieaxe gezogenen Senkrechten suchen. Von diesem Punkte aus trägt man dann nach abwärts eine Länge $f'g'$ gleich dem vierten Theil der Flächenbasis, in unserem Falle also einen Centimeter, auf ihr ab und verbindet den Endpunkt mit dem Scheitel der Parabel. Diese Verbindungslinie schneidet die zur Sehne gezogene Parallellinie, welche um $\frac{2}{3}$ der Höhe gegen den Parabelscheitel hin von ihr entfernt ist, in einem Punkte, dessen Entfernung von der Symmetrieaxe gleich der gesuchten reducirten Fläche ist. Dieselbe ist dann einfach auf die Kräftelinie zu übertragen, die durch den Schwerpunkt des Parabelsegments senkrecht zur Symmetrieaxe gezogen wird.

Aus den auf diese Weise erhaltenen Kräften haben wir das Kräftepolygon 0 1 2 3 ... 19 construirt, welches hier in eine Linie zusammenfällt. Die Strecke 0 19 desselben gibt die Summe aller Kräfte, oder den auf die Flächenbasis reducirten Inhalt des Schienenprofils. Wir finden in unserer Figur jene Strecke gleich 12,46 Centimeter, und da jeder Centimeter 4 Quadratcentimeter Fläche repräsentirt, so ist der Flächeninhalt des Profils gleich 49,8 Quadratcentimeter.

Um das Seilpolygon zu construiren, nahmen wir im Kräftepolygon den Pol C an; aus ihm erhielten wir das mit 0 I II III.... XIX XX bezeichnete Seilpolygon. Durch den Durchschnittspunkt α der äussersten Seiten desselben muss die Resultante sämmtlicher Kräfte gehen. Zieht man folglich durch diesen Punkt eine Senkrechte zur Symmetrieaxe, so schneidet sie die letztere in dem gesuchten Schwerpunkt S des Schienenprofils.

§. 80. Zweites Beispiel: Schwerpunkt eines Winkeleisenprofils. — Als zweites Beispiel für die Aufsuchung des Schwerpunktes einer unregelmässigen ebenen Figur haben wir in Fig. 64, Taf. XI ein Winkeleisenprofil gewählt, und zwar aus zwei Gründen: Erstens um auch eine unsymmetrische Figur zu behandeln, und zweitens um das Verfahren in dem Fall zu zeigen, wo die gegebene Figur in einige wenige geradlinig begrenzte Stücke getheilt werden kann. Das Profil ist wieder in natürlicher Grösse gezeichnet; wir haben es in sechs Stücke, vier Trapeze, ein Rechteck und ein Dreieck, zerlegt. Die Schwerpunkte dieser Stücke konnten also auf bekannte Weise gefunden werden. Sie sind mit (1), (2), (3), ... (6) bezeichnet worden. In diesen Schwerpunkten hat man sich wieder die auf eine gemeinschaftliche Basis reducirten Flächeninhalte der betr. Stücke als Parallelkräfte wirken zu denken.

Für die Reduktion der Flächen haben wir hier, wo man es nicht blos mit Trapezen zu thun hat, und wo die vorhandenen Trapeze nicht mehr die einfache Lage haben wie in Fig. 63, Taf. X, einen anderen Weg als im vorigen §. eingeschlagen.

a) Um nämlich zunächst den Inhalt eines Dreieckes ABC (Fig. 65, Taf. XII) auf die Basis a zu reduciren, durchschneide man von irgend einem Eckpunkt A desselben aus die gegenüberliegende Seite BC mit einem Radius gleich der doppelten Basis und verbinde jenen Eckpunkt mit dem erhaltenen Schnittpunkt. Die Antiprojektion CE der durchschnittenen Dreieckseite auf diese Verbindungslinie ist die gesuchte Reduktion. In der That sieht man leicht, dass $AD \times CE$ oder $2a \times CE$ gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC, folglich $a \times CE$ gleich diesem Inhalt ist, und daher CE dessen Reduktion. Das Verfahren ist immer anwendbar; denn es kann ja jede Seite des Dreiecks in der unendlichen Geraden, in welcher sie liegt, beliebig verschoben werden, ohne dass der Inhalt des Dreiecks sich

ändert. Dadurch kann man aber jeden der Endpunkte der verschobenen Seite der ihm gegenüberliegenden so nahe bringen, als man will (vergl. die Reduktion der Momente in §. 38 und die Fig. 34, Taf. V).

b) Um den Flächeninhalt eines beliebigen Viereckes ABCD (Fig. 66, Taf. XII) auf eine gegebene Basis zu reduciren, verwandle man dasselbe zunächst in ein Dreieck ADE dadurch, dass man durch einen seiner Eckpunkte C eine Parallele CE zu der Diagonale DB zieht, die nicht durch diesen Eckpunkt geht, und den Schnittpunkt E dieser Parallelen mit einer der Seiten, AB, aufsucht, die in der Gegenecke A von C zusammenstossen. Mit dem so erhaltenen Dreieck ADE verfährt man dann wie in a).

Auf diese Weise haben wir die Stücke des Winkeleisenprofils auf die Flächenbasis a = 2 Centimeter reducirt. Die dafür erhaltenen Strecken dachten wir uns zunächst als horizontal wirkende Kräfte in den betr. Schwerpunkten angebracht und construirten aus ihnen das Kräftepolygon 0 1 2 ... 6 (Fig. 64, Taf. XI). Für den Pol C desselben ergab sich das Seilpolygon 0 I II ... VI VII, dessen äusserste Seiten sich in dem Punkte α schneiden. Die durch diesen Punkt gehende Horizontallinie ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Profils.

Um einen zweiten geometrischen Ort zu finden, ist es nicht nothwendig, ein zweites Kräftepolygon zu zeichnen. Denkt man sich die Kräfte in den betr. Schwerpunkten vertikal wirkend, so kann man sich vorstellen, dass das ihnen zugehörige Kräftepolygon dadurch aus dem schon gezeichneten erhalten wird, dass man dasselbe um seinen Pol C um einen Winkel von 90° dreht. Dadurch werden alle Strahlen des neuen Polygons senkrecht zu denen des alten, und somit hat man die Seiten des zweiten Seilpolygons nur senkrecht, anstatt parallel, zu den Strahlen des bereits gezeichneten Kräftepolygons zu ziehen. 0′ I′ II′ ... VI′ VII′ ist dieses neue Seilpolygon und β' der Durchschnittspunkt seiner äussersten Seiten. Die durch diesen Punkt gezogene Vertikallinie ist der zweite geometrische Ort für den gesuchten Schwerpunkt; derselbe liegt folglich im Durchschnitt S dieses neuen geometrischen Ortes mit dem bereits gefundenen.

Schwerpunkt von Oberflächen.

§. 81. Mantelfläche einer vollständigen und einer parallel abgestumpften Pyramide. — Der Schwerpunkt der Mantelfläche einer Pyramide liegt in der Verbindungslinie ihrer Spitze mit dem Schwerpunkt der Umfassungslinie der Grundfläche. Dies erkennt man leicht, wenn man sich die Pyramide durch Ebenen parallel zu ihrer Grundfläche in sehr dünne Platten zerlegt denkt, deren Umfänge als materielle Linien betrachtet werden können. Die Schwerpunkte dieser Umfassungslinien liegen sämmtlich in einer geraden Linie, welcher daher geometrischer Ort für den Schwerpunkt der Mantelfläche der Pyramide ist. Diese Mantelfläche besteht aus Dreiecken, deren Grundlinien alle in der nämlichen Ebene, in der Grundfläche der Pyramide liegen; ihre Schwerpunkte liegen folglich auch sämmtlich in einer und derselben Ebene, in der nämlich, welche die Entfernung der Spitze von der Grundfläche in dem Verhältniss von 1 : 2 so theilt, dass der kleinere Theil zunächst der Grundfläche liegt. Der Durchschnittspunkt jener Ebene mit dem schon gefundenen geometrischen Ort ist der gesuchte Schwerpunkt. Derselbe theilt folglich die Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Umfassungslinie der Grundfläche im Verhältniss von 1 : 2 so, dass der kleinere Theil der Grundfläche anliegt.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche einer parallel abgestumpften Pyramide liegt zunächst wieder in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Umfassungslinien der beiden Grundflächen. Die Seitenflächen sind Trapeze, deren Schwerpunkte nach §. 72 gefunden werden können. Bezeichnen a und b die beiden Parallelseiten eines solchen Trapezes, so theilt der Schwerpunkt desselben die Verbindungslinie der Mitten jener Parallelseiten in dem Verhältniss von $a + 2b : 2a + b$, wo das dem Gliede $a + 2b$ entsprechende Stück der Seite a, das andere der Seite b anliegt. Nun haben die Parallelseiten der sämmtlichen Trapeze, welche Mantelflächen der abgestumpften Pyramide sind, das gleiche Verhältniss zu einander; somit ist auch das obige Verhältniss, in welchem der Schwerpunkt dieser Trapeze die Verbindungslinie der Mitten ihrer Parallelseiten theilt, für alle Trapeze das gleiche, diese Schwerpunkte liegen folglich alle in einer, zu den Grundflächen parallelen Ebene, in der auch der Schwerpunkt der Mantelfläche der Pyramide liegt. Dieser ist folglich der Durchschnitt der eben genannten Ebene mit dem oben schon gefundenen geometrischen Ort. Er theilt die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Umfassungslinien der beiden Grundflächen in dem Verhältniss von

$$a + 2b : 2a + b,$$

wo a und b die Parallelseiten irgend einer trapezförmigen Seitenfläche bezeichnen, oder auch in dem Verhältniss von

$$u + 2u' : 2u + u',$$

wenn u und u' die Umfänge der beiden Grundflächen der abgestumpften Pyramide bedeuten. Dabei muss immer das kleinere Stück der Theilung der grösseren Grundfläche zunächst liegen.

§. 82. **Mantelfläche eines vollständigen und eines parallel abgestumpften Kegels.** — Dieselben Resultate, welche wir soeben für den Schwerpunkt der Mantelfläche einer ganzen und einer parallel abgestumpften Pyramide erhalten haben, gelten für den Schwerpunkt eines ganzen und eines parallel abgestumpften Kegels, der ja als Pyramide mit unendlich grosser Seitenflächenzahl betrachtet werden kann. Für den abgestumpften Kegel hat man sich nur desjenigen Satzes des vorigen §. zu bedienen, in welchem die Umfänge u und u' der Grundflächen vorkommen. In dem speziellen Fall, wo diese Grundflächen Kreise werden, deren Umfänge ihren Radien proportional sind, lautet also jener Satz so: Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines parallel abgestumpften Kegels mit kreisförmigen Grundflächen theilt die Verbindungslinie der Mittelpunkte derselben in dem Verhältniss von

$$r + 2r' : 2r + r'$$

oder

$$d + 2d' : 2d + d',$$

wo r und r', bezw. d und d' die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen bezeichnen. Das kleinere Stück der Theilung ist natürlich wieder an der grösseren Grundfläche zu nehmen. Jene Theilung selbst kann offenbar ganz so vorgenommen werden, wie es beim Trapez für die Linie gezeigt worden ist, welche die Mitten der Parallelseiten verbindet (§. 72).

§. 83. **Mantelfläche eines Prisma's und eines Cylinders mit parallelen Grundflächen.** — Wenn ein Prisma mit parallelen Grundflächen in ähnlicher Weise, wie in §. 81 die Pyramide, durch Ebenen parallel zu seinen Grundflächen in Platten von gleicher, aber sehr geringer Dicke zerlegt wird, so gelangt man leicht zu dem Resultat, dass der Schwerpunkt seiner Mantelfläche in der Mitte der Linie liegt, welche die Schwerpunkte der Umfassungslinien seiner Grundflächen verbindet. Dasselbe Resultat gilt natürlich für jeden Cylinder mit parallelen Grundflächen.

§. 84. **Die Kugelhaube und die krumme Oberfläche einer Kugelzone.** — Denkt man sich die Höhe eines Kugelabschnittes in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilt und durch

die Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche des Abschnitts gelegt, so wird hiedurch die Oberfläche des letzteren in Zonen (zu äusserst in einen Abschnitt) zerlegt, deren Oberflächen durchweg gleiche Grösse haben. Es folgt daraus unmittelbar, dass der Schwerpunkt der Oberfläche des Abschnittes oder der Kugelhaube in der Mitte ihrer Höhe liegt. Aus denselben Gründen muss der Schwerpunkt der Oberfläche einer Kugelzone in der Mitte der Linie liegen, welche die Mittelpunkte der sie begrenzenden Parallelkreise verbindet.

Schwerpunkt von Körpern.

§. 85. **Prisma und Cylinder mit parallelen Grundflächen.** — Der Schwerpunkt eines Prisma's oder eines Cylinders mit parallelen Grundflächen liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser Grundflächen. Das ist leicht zu beweisen, indem man diese Körper durch Ebenen parallel zu ihren Grundflächen in eine sehr grosse Anzahl gleichdicker Platten zerlegt, deren Dicke jedoch so gering ist, dass sie als materielle ebene Flächen betrachtet werden können.

§. 86. **Das Tetraëder.** — Um den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraëders zu finden, theile man dasselbe wieder durch Ebenen parallel zu einer Seitenfläche in sehr dünne, als materielle Dreiecksflächen zu betrachtende Platten. Die Schwerpunkte dieser Platten liegen sämmtlich in der Linie, welche den Schwerpunkt dieser Seitenfläche mit der ihr gegenüberliegenden Spitze verbindet. In dieser Linie muss folglich auch der Schwerpunkt des Tetraëders liegen. In ähnlicher Weise erhält man noch drei geometrische Oerter für den Schwerpunkt, indem man die Verbindungslinie jeder der drei übrigen Ecken des Tetraëders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche zieht. Die vier geometrischen Oerter schneiden sich, wie sich auch geometrisch leicht zeigen lässt, in einem und demselben Punkt, dem Schwerpunkt des Tetraëders. Derselbe theilt jede der Linien, welche eine Spitze mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Grundfläche verbindet, in dem Verhältniss von $1 : 3$ so, dass das kleinere Stück der Grundfläche zunächst liegt.

Es ist leicht, noch andere geometrische Oerter für den Schwerpunkt eines Tetraëders $ABCD$ (Fig. 67, Taf. XII) aufzufinden. Denkt man sich dasselbe durch Ebenen parallel zu einem Paar gegenüberliegender Seiten in Platten von sehr geringer, aber durchweg gleicher Dicke zerschnitten, so erhalten diese Platten die Gestalt von Parallelogrammen $EFGH$, $E_1F_1G_1H_1$, welche am Anfang und Ende in gerade Linien, nämlich in jene sich gegenüberliegende Seiten CD und AB des Tetraëders übergehen. Man sieht leicht, dass die Schwerpunkte aller dieser Parallelogramme in der Verbindungslinie der Mittelpunkte J und K jener Seitenkanten AB und CD des Tetraëders liegen, welche Linie demnach auch den Schwerpunkt des letzteren enthalten muss. Noch mehr: die zusammenstossenden Seiten jener Parallelogramme bilden durchweg gleiche Winkel miteinander; ihre Flächeninhalte verhalten sich demnach wie die Produkte $GH \times GF$, $G_1H_1 \times G_1F_1$ jener Seiten. Weil aber

$$GH : G_1H_1 = CG : CG_1$$

und

$$GF : G_1F_1 = BG : BG_1,$$

so folgt

$$\overline{GH \times GF : G_1H_1} \times \overline{G_1F_1} = \overline{CG \times BG : CG_1 \times BG_1} = \overline{GL}^2 : \overline{G_1L_1}^2,$$

wenn GL und G_1L_1 die in den Eckpunkten G und G_1 senkrecht auf CB errichteten Ordinaten des Halbkreises bedeuten, der über der Kante CB als über einem Durchmesser beschrieben wurde. Die Quadrate über den Ordinaten dieses Halbkreises sind folglich den Flächeninhalten der Parallelogramme, deren auf dem Durchmesser CB gelegene Ecke mit dem Fusspunkte der Ordinate zusammenfällt, proportional. Wie sich nun aber immer je zwei gleichlange Ordinaten des Halbkreises finden, deren Fusspunkte vom Mittelpunkte des Halbkreises zu beiden Seiten desselben gleichweit entfernt sind, so finden sich unter obigen Parallelogrammen immer je zwei von gleichem Flächeninhalt, deren Schwerpunkte vom Mittelpunkte der Linie JK zu beiden Seiten desselben gleichweit abstehen. Da endlich der gemeinschaftliche Schwerpunkt eines solchen Parallelogrammenpaares mitten zwischen ihren Schwerpunkten liegt, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt S des Tetraëders der Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberstehender Kanten desselben ist.

Betrachtet man ABD als Grundfläche, C als Spitze der dreiseitigen Pyramide $ABCD$, so beträgt die in irgend welcher Richtung gemessene Entfernung des Mittelpunktes K der Seitenkante DC von der Grundfläche die Hälfte der in derselben Richtung gemessenen Entfernung der Spitze C von letzterer Fläche. Der Mittelpunkt S der Linie JK ist aber wieder halb so weit von derselben entfernt als jener Punkt K, und folglich ist die in irgend einer Richtung gemessene Entfernung des Schwerpunktes eines Tetraëders von einer Seitenfläche desselben viermal so klein als die Entfernung der Spitze, welche dieser Seitenfläche gegenüberliegt, von letzterer. Dies stimmt vollkommen mit dem überein, was wir schon oben auf anderem Wege gefunden haben.

Denkt man sich das Gewicht Q des Tetraëders $ABCD$ in seinem Schwerpunkt S als vertikal abwärts gerichtete Kraft wirken, so kann man dieselbe zunächst in zwei gleiche, parallele und gleichgerichtete Componenten zerlegen, die in J und K angreifen und die Grösse $\frac{1}{2}Q$ haben. Jede dieser Componenten kann dann wieder in ganz derselben Weise in zwei an A und B, bezw. C und D angreifende Seitenkräfte zerlegt werden, deren Grösse je $\frac{1}{4}Q$ ist. Nimmt man nun irgend eine Ebene als Momentenebene und nennt a, b, c, d die in irgend einer Richtung gemessenen Entfernungen der Eckpunkte A, B, C, D von derselben, s aber die in gleicher Richtung gemessene Entfernung des Schwerpunkts S des Tetraëders, so ist nach dem Momentensatz

$$Qs = \frac{1}{4}Qa + \frac{1}{4}Qb + \frac{1}{4}Qc + \frac{1}{4}Qd$$

oder

$$s = \frac{1}{4}\left(a + b + c + d\right),$$

also die Entfernung des Schwerpunkts gleich dem arithmetischen Mittel der Entfernungen der Ecken des Tetraëders (vergl. den Satz in §. 70 für das Dreieck).

§. 87. Pyramide und Kegel. — Der Schwerpunkt einer mehr als dreiseitigen Pyramide liegt ebenfalls in der Verbindungslinie ihrer Spitze mit dem Schwerpunkt ihrer Grundfläche. Denkt man sich eine solche Pyramide dadurch in dreiseitige zerlegt, dass man durch ihre Spitze und durch die von einem und demselben Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen ihrer Grundfläche Ebenen legt, so liegen die Schwerpunkte aller jener dreiseitigen Pyramiden in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, in der nämlich, welche die Entfernung der Spitze von der Grundfläche im Verhältniss von $1:3$ theilt, den kleineren Theil an der Grundfläche genommen. In dieser Ebene liegt folglich auch der Schwerpunkt der vielseitigen Pyramide. Derselbe theilt also die

Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche ebenfalls in dem Verhältniss von 1 : 3 so, dass der kleinere Theil zunächst der Grundfläche liegt.

Dasselbe Resultat gilt selbstverständlich für jeden Kegel.

§. 88. Die parallel abgestumpfte Pyramide und der parallel abgestumpfte Kegel. — Um den Schwerpunkt einer parallel abgestumpften Pyramide $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Fig. 68, Taf. XII) zu erhalten, ergänzt man dieselbe zu einer vollständigen $ABCDO$. Dann liegen der Schwerpunkt S der letzteren und der S_1 der Ergänzung in der Linie Os, welche die Spitze O mit dem Schwerpunkt s der unteren Grundfläche verbindet, in welcher Linie auch der Schwerpunkt s_1 der oberen Grundfläche liegt. Der Schwerpunkt S der ganzen Pyramide ist dabei um $\frac{1}{4}$ der Verbindungslinie Os vom Schwerpunkt der unteren Grundfläche und derjenige S_1 der Ergänzung ist um $\frac{1}{4}$ der Verbindungslinie Os_1 vom Schwerpunkt der oberen Grundfläche entfernt.

Nehmen wir den Schwerpunkt S_2 des Stumpfes, der gleichfalls in der Linie Os_1s liegen muss, als gefunden an, und denken wir uns in ihm und im Schwerpunkt S_1 der Ergänzung parallele und gleichgerichtete Kräfte wirken, die beziehungsweise gleich den Gewichten Q_2 und Q_1 des Stumpfes und der Ergänzung sind, zo muss die Resultante derselben im Schwerpunkt S der ganzen Pyramide angreifen. Es muss folglich die Proportion stattfinden

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q_2$$

oder, wenn Q das Gewicht der vollständigen Pyramide bezeichnet,

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q - Q_1,$$

woraus folgt

$$\overline{S_2S_1} : \overline{S_2S} = Q : Q_1.$$

Trägt man folglich an die bekannten Punkte S und S_1 zwei nach beliebigen Richtungen und in gleichem Sinne gezogene Parallellinien S_1T und ST_1 an, deren Längen beziehungsweise den Gewichten der ganzen und der Ergänzungs-Pyramide proportional sind, so schneidet die Verbindungslinie TT_1 ihrer Endpunkte die Linie Os in dem gesuchten Schwerpunkt S_2 des Stumpfes.

Es ist aber leicht, zwei solche Linien S_1T, ST_1 zu finden, die sich wie die Gewichte, folglich wie die Cubikinhalte und daher wie die dritten Potenzen zweier homologen Kanten OA und OA_1 jener beiden Pyramiden verhalten, die einander ähnlich sind. Man darf nur durch den Punkt O eine beliebige Linie neben die OA legen, auf dieselbe die Strecken OA und OA_1 von O aus als OA' und OA_1' nochmals auftragen und die Antiparallelen $A'A_1$ und $A_1'A$ ziehen. Dann nimmt man eine der gesuchten Linien, etwa ST_1, beliebig an und trägt sie von O aus auf den einen Schenkel des Winkels AOA' als OU auf. Zieht man dann durch den Endpunkt U eine Parallele zu einer jener Antiparallelen A_1A', bis der andere Winkelschenkel in V geschnitten wird, ferner durch diesen Schnittpunkt eine Parallele zur zweiten Antiparallelen $A_1'A$, bis wieder der erste Winkelschenkel in W geschnitten wird, und endlich durch den neuen Schnittpunkt eine Parallele zur ersten Antiparallelen A_1A', bis der zweite Winkelschenkel in X getroffen ist, so wird OX die zweite gesuchte Linie; nämlich es verhält sich, wie leicht zu sehen,

$$OU : OV = OA_1 : OA$$
$$OV : OW = OA_1 : OA$$
$$OW : OX = OA_1 : OA$$

und folglich

$$OU : OX = \overline{OA_1}^3 : \overline{OA}^3.$$

Man hat also ST_1 gleich OU und S_1T gleich OX zu machen, um in dem Schnittpunkt der Verbindungslinie TT_1 mit der Linie Os den Schwerpunkt S_2 der abgestumpften Pyramide zu erhalten.

Durch eine ganz ähnliche Construktion findet man den Schwerpunkt eines parallel abgestumpften Kegels. Statt der Seitenkante OA hat man nur eine beliebige Mantellinie des vollständigen Kegels zu nehmen.

§. 89. **Polyeder.** — Jeden Körper, der von ebenen Flächen begrenzt ist, kann man in Pyramiden und selbst in Tetraëder zerlegen, deren Schwerpunkte nach §§. 86 und 87 gefunden werden können. Denkt man sich in diesen Schwerpunkten parallele Kräfte gleich den Gewichten jener Pyramiden oder Tetraëder, also proportional den Cubikinhalten derselben wirken, so ist deren Mittelpunkt der Schwerpunkt des Körpers. Er kann also auf die in §. 58 angegebene Weise construirt werden.

§. 90. **Der Kugelsektor.** — Der Schwerpunkt eines Kugelsektors, den wir uns durch Umdrehung des Kreissektors OACB (Fig. 69, Taf. XII) um seinen mittleren Radius OC entstanden denken wollen, liegt offenbar in diesem mittleren Radius. Denkt man sich die Kugelhaube ACB in Elemente von gleicher Grösse zerlegt, und nimmt man dieselben als Grundflächen von Pyramiden oder Kegeln, deren Spitzen im Mittelpunkte O der Kugel liegen, dann befinden sich die Schwerpunkte derselben sämmtlich auf der Kugelhaube A′C′B′, deren Radius $\frac{3}{4}$ von demjenigen des gegebenen Sektors ist. Diese Kugelhaube kann im Sinne des §. 65 als gleichmässig belastete Fläche betrachtet werden, deren Schwerpunkt S, in der Mitte ihrer Höhe C′D′ gelegen, mit dem des Kugelsektors zusammenfällt.

§. 91. **Die concentrische Kugelschale.** — Der Schwerpunkt einer concentrischen Kugelschale, die wir uns durch Umdrehung des Ringstückes $A_1ACBB_1C_1$ (Fig. 70, Taf. XII) um seinen mittleren Radius OC entstanden denken, liegt natürlich wieder auf diesem letzteren. Denken wir uns die Schale als Differenz der Sektoren OACB und $OA_1C_1B_1$, deren Schwerpunkte S und S_1 nach vorigem §. gefunden werden können, und nehmen wir den Schwerpunkt S_2 der Schale als bereits gefunden an, so müssen zwei in S_2 und S_1 angreifende, parallele und gleichgerichtete Kräfte, die bezw. gleich den Gewichten Q_2 und Q_1 der Schale und des Sektors $OA_1C_1B_1$ sind, eine Resultante haben, die in S angreift. Daher muss die Proportion stattfinden

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q_2$$

oder, mit Q das Gewicht des Kugelsektors OACB bezeichnet,

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q - Q_1,$$

woraus

$$\overline{S_2S} : \overline{S_2S_1} = Q_1 : Q.$$

Wenn man folglich von den bekannten Punkten S_1 und S aus nach beliebiger Richtung hin und in gleichem Sinne zwei Parallele S_1T und ST_1 zieht, deren Längen sich verhalten wie die Gewichte der beiden Kugelsektoren, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte T und T_1 derselben den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt S_2 der Kugelschale.

Nun verhalten sich die Gewichte Q und Q_1 der beiden Kugelsektoren wie ihre Cubikinhalte, also wie die dritten Potenzen ihrer Radien OA und OA_1. Da OA gleich OC und OA_1 gleich OC_1, so sind AC_1 und A_1C antiparallel. Man darf folglich nur OU beliebig annehmen, UV parallel zu A_1C, dann VW parallel zu AC_1, endlich WX wieder parallel zu A_1C ziehen, um n OU und OX zwei Linien zu erhalten, die das verlangte Verhältniss $Q_1 : Q$ zu einander haben. Macht man folglich ST_1 gleich OU und S_1T gleich OX, so gibt der Schnitt der Linie TT_1 mit OC den gesuchten Schwerpunkt S_2.

§. 92. **Der Kugelabschnitt.** — Der Schwerpunkt S_2 eines Kugelabschnittes, den wir uns durch Umdrehung des Kreisabschnittes ACB (Fig. 71, Taf. XII) um seinen mittleren Radius OC

entstanden denken können, liegt auf diesem mittleren Radius. Auf derselben Linie liegen die nach §§. 90 und 87 zu findenden Schwerpunkte S und S_1 des Kugelausschnitts OACB und des Kegels OAB, als deren Differenz der Kugelabschnitt betrachtet werden kann. Man kann folglich auf einem ganz ähnlichen Wege wie im vorigen §. zur Kenntniss des Schwerpunkts des letzteren gelangen. Wenn man von den bekannten Schwerpunkten S und S_1 aus Parallele ST_1 und S_1T nach beliebiger Richtung hin und in dem nämlichen Sinne zieht und deren Längen proportional den Gewichten oder Cubikinhalten bew. des Kegels OAB und des Ausschnittes OACB macht, so schneidet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte T, T_1 den mittleren Radius im gesuchten Schwerpunkt. Nun verhalten sich die Inhalte jener Körper bekanntlich wie

$$\frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h) : \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

oder wie

$$(2r-h)(r-h) : 2r^2,$$

oder wie

$$x : r,$$

wenn

$$x = \frac{(2r-h)(r-h)}{2r}$$

gesetzt und mit r der Kugelradius, mit h die Höhe DC des Abschnittes bezeichnet wird.

S_1T ist folglich gleich dem Kugelradius zu machen, und die Länge x der anderen Parallelen ST_1 findet sich aus der Proportion

$$2r : (2r-h) = (r-h) : x.$$

Verlängert man folglich den Radius OC rückwärts um sich selbst bis E, und trägt man auf die an C gezogene Tangente vom Berührungspunkt C aus die Länge $CF = OD = r-h$ ab, so schneidet die Verbindungslinie EF die Sehne AB in einem Punkte G, dessen Abstand DG von der Sehnenmitte die gesuchte Linie x ist. Man braucht folglich nur noch ST_1 gleich DG zu machen und die Verbindungslinie TT_1 zu ziehen, um in deren Schnittpunkt mit dem mittleren Radius OC den gesuchten Schwerpunkt S_2 des Kugelabschnittes zu erhalten.

§. **93. Die körperliche Kugelzone.** — Um den Schwerpunkt einer körperlichen Kugelzone zu finden, schlagen wir im Folgenden einen Weg ein, der auch bei anderen derartigen Aufgaben mit Vortheil verfolgt werden kann. Die Zone AA_1B_1B (Fig. 72, Taf. XII), welche wir uns durch Umdrehung des zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Kreisstücks AA_1B_1B um den mittleren Radius OM entstanden denken, kann aus den beiden Kugelsektoren OAMB und OA_1MB_1 und aus den beiden Kegeln ABO und A_1B_1O so erhalten werden, wie die folgende Relation zeigt:

$$\text{Zone } AA_1B_1B = \text{Sekt. } OAMB - \text{Sekt. } OA_1MB_1 + \text{Keg. } A_1B_1O - \text{Keg. } ABO.$$

Stellt man sich also vor, dass an den Schwerpunkten dieser Bestandtheile parallele Kräfte wirken gleich deren Gewichten und in dem einen oder anderen Sinne gerichtet, je nachdem das Vorzeichen des betreffenden Stückes in obiger Relation + oder — ist, so geht die Resultante dieser Kräfte durch den gesuchten Schwerpunkt der Kugelzone. Wenn man jene Kräfte durch ein Kräfte- und Seilpolygon verbindet und durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seiten des letzteren eine Parallele zu den Kräften zieht, so schneidet diese den mittleren Radius OM, welcher offenbar auch ein geometrischer Ort für den gesuchten Schwerpunkt ist, in diesem.

Die Schwerpunkte der Stücke, aus denen wir uns die Kugelzone erhalten denken, können

nach den §§. 87 und 90 sehr leicht gefunden werden. Sie sind der Ordnung nach, in welcher die Stücke in obiger Relation vorkommen: S_1, S_2, S_3, S_4. In der nämlichen Ordnung genommen, verhalten sich die Gewichte oder Cubikinhalte jener Stücke wie

$$\frac{2}{3} r^2 \pi h : \frac{2}{3} r^2 \pi h_1 : \frac{1}{3} \rho_1^2 \pi (r-h_1) : \frac{1}{3} \rho^2 \pi (r-h),$$

oder wie

$$2h : 2h_1 : (r-h_1) \frac{\rho_1^2}{r^2} : (r-h) \frac{\rho^2}{r^2},$$

wo r den Kugelradius, h und h_1 die Höhen MD und MD_1 und ρ und ρ_1 die Halbsehnen AD und A_1D_1 bezeichnen. Die zwei letzten Glieder des obigen Verhältnisses sind leicht zu construiren. Wenn man auf die Winkelschenkel OA und OM die Halbsehnen ρ_1 gleich $OR_1 = OR_1'$ und bezw. $\rho = OR = OR'$ abträgt und die Antiparallelen AR und MR', bezw. AR_1 und MR_1' zieht, so erhält man $(r-h_1) \frac{\rho_1^2}{r^2}$, wenn man D_1W_1 parallel zu MR_1' und W_1X_1 parallel zu AR_1 zieht. Denn es ist

$$\overline{OX_1} : \overline{OW_1} = \rho_1 : r$$

und

$$\overline{OW_1} : \overline{OD_1} = \rho_1 : r,$$

folglich

$$OX_1 = (r-h_1) \frac{\rho_1^2}{r^2}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für $(r-h) \frac{\rho^2}{r^2}$ die Strecke OX, wenn man DW parallel zu MR' und WX parallel zu AR zieht.

Die Strecken $2h = 2\overline{MD}$, $2h_1 = 2\overline{MD_1}$, dann OX_1 und OX können also als die Kräfte angesehen werden, welche der Ordnung nach in den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3, S_4 wirkend gedacht werden müssen. Wir zeichnen diese Kräfte in der Richtung der Sehnen AB, A_1B_1, und zwar die erste und dritte in dem Sinne von links nach rechts, die anderen beiden im entgegengesetzten Sinne. Es entspricht ihnen dann das Kräftepolygon 0 1 2 3 4, in welchem der Pol C willkürlich anzunehmen ist. Aus demselben ergibt sich das Seilpolygon 0 I II III IV V, dessen äusserste Seiten sich im Punkte α schneiden. Die durch diesen Punkt gezogene Parallele zu den Kräften schneidet den mittleren Radius OM im gesuchten Schwerpunkt S der körperlichen Kugelzone.

§. 94. Abschnitt eines Paraboloids. -- Lässt man längs eines Durchmessers AX einer Parabel BAC (Fig. 62, Taf. IX) eine Ellipse mit ihrem Mittelpunkt so fortrücken, dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser derselben sich selbst parallel bleiben und die Enden des einen dieser Durchmesser stets auf der Parabel BAC liegen, während der andere zu diesem immer dasselbe Verhältniss behält, so entsteht ein Paraboloid. Den Schwerpunkt eines Abschnittes BAC desselben finden wir in ganz ähnlicher Weise wie im §. 78 denjenigen des Parabelsegmentes. Er liegt offenbar auf dem Durchmesser AD. Zerschneiden wir den Abschnitt durch eine Reihe von Ebenen, die zu BC parallel sind, in sehr dünne Platten $\beta\gamma$, welche als materielle ebene Figuren betrachtet werden können, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Figuren, Ellipsen, im Durchmesser AD. In diesen Schwerpunkten denken wir uns parallele Kräfte wirken, welche den Gewichten jener Platten, also den Flächeninhalten jener Ellipsen und daher, weil letztere einander ähnlich sind, den Quadraten der Halbmesser oder Ordinaten $\delta\gamma = y$ proportional sind. Wir wenden auf diese Kräfte den Momentensatz an, indem wir eine durch A parallel zu jene Schnittebenen

gelegte Ebene MM als Momentenebene annehmen und die Entfernungen x der Angriffspunkte jener Kräfte, sowie diejenige x_0 des Angriffspunktes ihrer Resultante in der Richtung AX messen. Der Momentensatz ergibt dann die Relation

$$x_0 \, \Sigma y^2 = \Sigma x y^2$$

woraus

$$x_0 = \frac{\Sigma x y^2}{\Sigma y^2}.$$

Es besteht nun wieder zwischen den Ordinaten y und den Abscissen x der Parabel BAC die Gleichung

$$y^2 = 2px,$$

wo p eine constante Grösse ist. In Folge davon geht obige Relation in die über

$$x_0 = \frac{\Sigma 2px^2}{\Sigma 2px} = \frac{\Sigma x^2}{\Sigma x},$$

in welcher der Quotient auf der rechten Seite mit Hülfe der höheren Analysis als $\frac{2}{3} l$ gefunden wird, mit l die Länge AD des Durchmessers zwischen der Parabel und der Grenzsehne BC bezeichnet. Der Schwerpunkt eines Paraboloid-Abschnitts liegt folglich in dem Durchmesser des Paraboloids, der durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht, und theilt die Strecke desselben zwischen der Grundfläche und der Paraboloid-Oberfläche im Verhältniss von 1 : 2 so, dass der kleinere Theil an der Grundfläche liegt.

Der Cubikinhalt eines solchen Paraboloid-Abschnittes ist bekanntlich gleich dem halben Produkt aus der elliptischen Grundfläche in die senkrecht gemessene Entfernung des Endpunktes A desjenigen Durchmessers von ihr, welcher durch ihren Mittelpunkt geht.

§. 95. Schwerpunkt eines unregelmässig begrenzten Körpers. — Den Schwerpunkt eines unregelmässigen, von krummen Flächen begrenzten Körpers findet man am besten dadurch, dass man den Körper durch parallele Ebenen in eine grosse Anzahl dünner Platten von durchweg gleicher Dicke zerschneidet. Die Dicke dieser Platten soll so klein genommen werden, dass man ihre Schwerpunkte mit denjenigen der Schnittfiguren zusammenfallend annehmen darf, welche Ebenen ergeben, die mitten zwischen den die Platten begrenzenden Schnittebenen parallel zu diesen gezogen werden, und dass die Cubikinhalte der Platten proportional den Flächeninhalten jener mittleren Schnittfiguren gesetzt werden dürfen. Denkt man sich dann in den Schwerpunkten der Platten Parallelkräfte wirken, welche ihren Inhalten proportional sind, so ist der Mittelpunkt dieser Kräfte, der nach §. 58 gefunden werden kann, der gesuchte Schwerpunkt des Körpers.

Bei der wie oben vorgenommenen Zerlegung eines Körpers durch Parallelschnitte erhält man in der Regel an den Enden haubenförmige Stücke oder Reste. Diese Hauben kann man meistens als Paraboloidabschnitte betrachten und demnach so behandeln, wie es im vorigen §. gezeigt wurde.

IX. Abschnitt.

Parallele Kräfte in einer Ebene.

§. 96. Vorkommen paralleler, in einer Ebene liegender Kräfte in der Praxis. — Alles, was im Allgemeinen über parallele, in einer Ebene liegende Kräfte zu sagen ist, über ihre Zusammensetzung und Zerlegung, über ihre Drehungsmomente um irgend einen Punkt in ihrer Ebene, wurde bereits im IV. und V. Abschnitte erörtert. Aber solche Kräfte kommen insbesondere als Lasten, welche Bauwerke jeder Art zu tragen haben, in den Anwendungen so häufig vor, dass es geboten erscheint, hier noch etwas näher auf sie einzugehen. Wir werden dabei stets speziell ihre eben bezeichnete Erscheinungsform vor Augen haben und unsere Betrachtungen also auf Kräfte beschränken, welche, soweit sie als gegeben vorausgesetzt werden, durchweg vertikal abwärts gerichtet sind.

§. 97. Kette und Bogen. — Seien P_1, $P_2 \ldots P_5$ (Fig. 73_b), Taf. XIII) parallele, vertikal abwärts gerichtete Kräfte — Lasten —, welche in Fig. 73_a) zum Kräftepolygon 0 1 2 . . . 5 vereinigt wurden; für den beliebigen Pol C desselben sei das Seilpolygon 0 I . . . . V VI construirt. Nimmt man die Knotenpunkte I, II . . . dieses letzteren als Angriffspunkte der Kräfte P, und denkt man sich diese Punkte durch vollkommen biegsame Linienstücke (Seil- oder Kettenstücke) verbunden, während die erste und letzte Seilpolygonseite, von derselben Beschaffenheit wie die anderen, in den beliebigen Punkten A, B befestigt sind, so erhält man eine Anordnung, welche wir kurz „Kette“ nennen wollen.

Würde man den Pol C auf der anderen Seite der Kräftelinie 0 5 genommen haben, so würde das Seilpolygon seine convexe Seite nach aufwärts kehren. Die Linien, durch welche man dann die Knotenpunkte desselben sich verbunden denken könnte, müssten als starr angenommen werden, und wenn wiederum die erste und letzte Polygonseite auf zwei Fixpunkte A und B gestützt würden, so würde man eine Anordnung bekommen, die kurz „Bogen“ genannt werden soll, und für welche der Gewölbbogen, bei dem das Seilpolygon in die sog. Drucklinie übergeht, als Beispiel angeführt werden möge (vergl. §. 32).

Die Strahlen 0C, 1C . . . 5C des Kräftepolygons repräsentiren bekanntlich die Spannungen in den Seilpolygonseiten 0 I, I II . . . . V VI, hier also die Spannungen der Seil- oder Kettenstücke 0 I, I II . . . . V VI der Grösse und Richtung nach. Speziell geben also der erste und letzte Strahl 0C und 5C die Einwirkungen, welche die Fixpunkte A und B von den dort aufgehängten Seilstücken zu erleiden haben, bezw. auf dieselben ausüben. Zerlegt man jede dieser Spannungen in eine horizontale und vertikale Componente, so werden die ersteren alle einander gleich, nämlich gleich der Senkrechten CU, welche im Kräftepolygon vom Pol auf die Kräftelinie gefällt wird. Die vertikalen Componenten sind für das Stück 0 I gleich U 0, für I II gleich U 1,

für II III gleich U 2 etc., endlich für V VI gleich U 5. Sie sind also für irgend eine Stelle der Kette gleich der Summe der Vertikal-Kräfte P, welche zwischen ihr und dem tiefsten Punkt der Kette liegen, vorausgesetzt, dass man sich diejenige Vertikalkraft P, welche an diesem Punkte selbst thätig ist, so in zwei Theile getheilt denkt, wie es durch die Senkrechte CU im Kräftepolygon geschieht, und den einen dieser Theile zur einen Seite der Kette rechnet, den andern Theil zur anderen Seite derselben. Die Horizontal- und Vertikal-Componenten der Einwirkungen, welche in den Fixpunkten A und B stattfinden, sind natürlich gleich denen der Spannungen in den Stücken 0 I und V VI also erstere gleich CU und letztere gleich U 0 und bezw. U 5, wenn man blos ihre absolute Grösse in's Auge fasst. Ihr Sinn ergibt sich leicht.

Dieselben Auseinandersetzungen, wie wir sie eben für die Kette gegeben haben, können unmittelbar auf den Bogen übertragen werden. Die Zugspannungen verwandeln sich einfach in Druckspannungen.

Wenn man bei derselben Lage der Kräfte P_1, P_2 ... P_5 statt des Fixpunktes B einen anderen, in derselben Vertikallinie gelegenen B' nimmt, an dem die Kette aufgehängt sein soll, so ändert sich natürlich die Gestalt der letzteren, und es ist leicht zu zeigen, wie die neue Form aus der ursprünglichen A I II ... V B abgeleitet werden kann. Denkt man sich die Resultante der Kräfte P_1, P_2 ... P_5 in zwei Componenten zerlegt, welche in den durch die Fixpunkte A, B gelegten Vertikallinien liegen, so erhält man dieselben, indem man die Schlusslinie AB des Seilpolygons 0 I II ... V VI zieht und durch den Pol C des Kräftepolygons eine Parallele CT dazu. Dieselbe theilt die Resultante 0 5 in die gesuchten Componenten 0 T und T 5. Diese Componenten müssen dieselben bleiben, wo auch der Fixpunkt B' in der durch B gezogenen Vertikallinie angenommen werden mag. Aber da das neue Seilpolygon durch den neuen Fixpunkt hindurch gehen muss, so ändert sich seine Schlusslinie, sie wird AB' statt AB. Eine zu ihr parallel gezogene Linie, welche durch den Pol des zugehörigen Kräftepolygons hindurchgeht, muss folglich zugleich den Punkt T enthalten, und dadurch ist ihre Lage völlig bestimmt. Wo auf dieser Parallelen TN der Pol des neuen Kräftepolygons angenommen werden will, ist von vornherein in's Belieben gestellt. Er wird erst bestimmt, wenn irgend eine der Seiten des neuen Polygons, etwa gleich die erste, 0' I', die auch durch den Fixpunkt A hindurch geht, angenommen wird, oder wenn seine Entfernung von der Kräftelinie, die Momentenbasis, vorgeschrieben ist. Im ersteren Falle wird der neue Pol C' der Durchschnitt der zu 0' I' durch 0 gezogenen Parallelen mit der vorhin erhaltenen Linie TN.

Man hat jetzt die Aufgabe, zu demselben Kräftepolygon 0 1 2 ... 5 für einen neuen Pol C' ein neues Seilpolygon aus dem alten zu construiren. Das geschieht nach dem Satze des §. 29, welcher sagt, dass sich die gleichvielten Seiten der Seilpolygone auf einer und derselben Parallelen zur Verbindungslinie der beiden Pole schneiden. Diese Parallele AM ist in unserem Fall durch den Fixpunkt A zu legen, in dem sich die ersten Seiten schneiden. Verlängert man folglich die Seiten I II, II III ... VB des alten Seilpolygons, bis sie die Linie AM in den Punkten I'', II'' ... V'' schneiden, so gehen durch diese Punkte die Seiten I' II', II' III' ... V' B' des neuen Seilpolygons hindurch und können also leicht gezogen werden.

Es versteht sich von selbst, dass die durchweg gleichgrossen Horizontalcomponenten der Spannungen in der neuen Kette gleich C' U' werden und die Vertikal-Componenten derselben jetzt von dem Punkte U', statt U zu rechnen sind. Ebenso leicht ist zu ersehen, dass und wie die vorstehenden Betrachtungen dazu angewendet werden können, um bei gegebenen Kräften P_1, P_2 ... P_5 und gegebener Lage derselben die Kette, an der sie thätig sind, so zu con-

struiren, dass sie durch zwei gegebene Fixpunkte A, B' hindurchgeht. Nachdem man aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon 0 1 2 ... 5 construirt und einen beliebigen Pol C desselben angenommen hat, zeichnet man das zugehörige Seilpolygon, dessen erste Seite man sogleich durch den einen Fixpunkt A hindurchlegen kann. Für eine durch den zweiten Fixpunkt B' hindurchgehende Vertikale zeichnet man alsdann die Schlusslinie AB jenes Seilpolygons und erhält mittelst der zu ihr durch den Pol C gezogenen Parallelen den Punkt T im Kräftepolygon. Durch diesen legt man dann die Parallele TN zur Verbindungslinie AB' der gegebenen Fixpunkte und verfährt nun weiter genau so, wie es eben angegeben wurde.

§. 98. Mitteldruckslinie und Horizontalschub in Gewölbbögen. — Die letzte Aufgabe kommt, in etwas modificirter Form, insbesondere bei Gewölbbögen vor, eigentlich bei der Construktion der Mitteldruckslinie der einen Hälfte derselben (vgl. §. 32), wenn diese so zu zeichnen ist, dass sie durch den Scheitel A (Fig. 75, Taf. XIV) des Gewölbes und durch einen bestimmten Punkt B' des Widerlagers hindurchgeht. Die Kräfte P_1, P_2 ... P_{10} sind die Gewichte der Lamellen, in welche man sich das Gewölbe nebst der darauf liegenden Belastung zerschnitten denken kann; sie gehen durch die Schwerpunkte dieser Lamellen hindurch. Nachdem man aus diesen Kräften das Kräftepolygon 0 1 2 ... 10 construirt hat, nimmt man einen beliebigen Horizontalschub H gleich 0C im Scheitel an, und construirt hiefür, also für den Pol C im Kräftepolygon, ein Seilpolygon AI II .... XI. Dasselbe wird natürlich im Allgemeinen nicht durch den gegebenen Punkt B' des Widerlagers hindurch gehen und gibt dann eben dadurch zu erkennen, dass man den Horizontalschub nicht richtig gewählt hat. Bei der richtigen Grösse H' gleich 0C' desselben, also bei der richtigen Lage des Poles C' muss die letzte Seite des Seilpolygons durch B' gehen.

Nun schneiden sich die gleichvielten Seiten der zu C und C' gehörigen Seilpolygone auf einer zu CC' parallelen Linie, welche durch den ihnen gemeinschaftlichen Punkt I hindurchgeht, also auf der Scheiteltangente AD. Sucht man also die Schnittpunkte II'', III'' ... X'' der Polygonseiten II III, III IV ... XB mit jener Linie, so geht zunächst die letzte Seite X' XI' des neuen Polygons durch die Punkte X'' und B' hindurch und ist folglich bestimmt. Eine Parallele zu ihr durch den Punkt 10 im Kräftepolygon schneidet auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt 0 desselben den richtigen Horizontalschub 0C' ab. Das zu diesem gehörige Seilpolygon oder die Drucklinie AI II' III' ... X'B' ist dann leicht mittelst der übrigen Punkte IX'', VIII'', VII'' ... II'' zu ziehen.

§. 99. Der Balken und die von aussen auf ihn einwirkenden Kräfte. — In den folgenden Paragraphen werden wir uns mit Trägern beschäftigen, die eine vertikale Längs-Symmetrieebene besitzen, oder welche, wie man sich häufig kürzer ausdrückt, in einer Vertikalebene liegen. Mit ihren beiden Enden, und nur mit diesen, sollen dieselben auf Unterstützungspunkten, die sich in gleicher Höhe befinden, frei aufliegen, so dass auf diese Stützpunkte nur vertikal abwärts gerichtete Drückungen ausgeübt werden können. Die Belastung dieser Träger werden wir bald als stetig über dieselben vertheilt, bald als in einzelnen Punkten concentrirt voraussetzen, welch' letzteres z. B. bei der Belastung einer Brücke durch einen Eisenbahnzug, der in den Berührungspunkten der einzelnen Räder auf ihr ruht, der Fall ist.

In unseren Figuren werden wir die Träger als prismatisch, von durchweg gleichem Querschnitt, voraussetzen. Solche Träger nennen wir einfach „Balken". Unsere Betrachtungen aber lassen sich sofort auch auf Träger von verschiedenen Querschnitten anwenden.

§. 100. Balken, auf den blos concentrirte Kräfte wirken. — Für den Fall, dass blos concentrirte Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ (Fig. 45, Taf. VI) auf einen Balken wirken, haben wir alles, was über deren Zusammensetzung, dann Zerlegung in die Auflagerdrücke, sowie über die Summe der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte und endlich über die Drehungsmomente derselben um irgend einen Punkt, oder eigentlich um eine Horizontalaxe des Querschnitts zu sagen ist, bereits im §. 48 abgehandelt, auf welchen hier ausdrücklich verwiesen wird.

§. 101. Balken, auf den blos eine stetig vertheilte Last wirkt. — Wenn auf einem Balken AB (Fig. 74, Taf. XIII) eine stetig vertheilte Last liegt, so wird das Gesetz der Vertheilung derselben am besten dadurch ausgedrückt, dass man über dem Balken, als über einer Abscissenaxe, eine Curve acb zeichnet, deren Ordinaten je gleich der Belastung pro Längeneinheit sind, welche auf diejenige Stelle des Balkens trifft, wo sich der Fusspunkt der Ordinate befindet. Diese Curve nennt man kurz „Belastungscurve"; ihr Flächeninhalt, d. h. die zwischen ihr, der Abscissenaxe und den äussersten Ordinaten enthaltene Fläche, in der passenden Einheit ausgedrückt, ist offenbar gleich der Gesammtbelastung des Balkens. Die auf irgend ein Stück desselben treffende Last ist gleich derjenigen Fläche, welche zwischen den beiden End-Ordinaten dieses Stückes einerseits und zwischen der Belastungscurve und der Abscissenaxe andererseits gelegen ist. Kurz, man kann sich vorstellen, dass der ganze Balken AB die überall gleichdicke und homogene, materielle Fläche AacbB, deren Gewicht gleich der Gesammtbelastung ist, zu tragen habe.

Das Seilpolygon für eine solche stetig vertheilte Belastung geht natürlich in eine Curve, die Seilcurve über. Man erhält dieselbe annähernd, wenn man sich den Balken in eine grössere Anzahl gleicher Stücke getheilt denkt und die auf diese treffenden Belastungen in ihren Schwerpunkten vereinigt. Diese Belastungen werden durch die den Theilen des Balkens entsprechenden Stücke der Fläche AacbB dargestellt, und ihre Schwerpunkte liegen in den Vertikalen, welche durch die Schwerpunkte jener Flächenstücke hindurchgehen. Für den Fall, dass man die Theile des Balkens klein genug nimmt, können die entsprechenden Flächenstücke als Trapeze betrachtet und darf angenommen werden, dass deren Schwerpunkt in der Vertikallinie liegt, welche mitten zwischen ihren vertikalen Parallelseiten gezogen wird. Und wenn man, wie schon bemerkt, den Balken in gleichgrosse Stücke theilt, so sind die mittleren Parallelen der Trapeze deren Inhalten proportional, und also auch proportional den Belastungen, welche in ihnen concentrirt werden.

In Fig. 74 theilten wir die Balkenlänge in 10 gleiche Theile, deren Mitten mit 1, 2 ... 10 bezeichnet wurden. In den durch sie hindurchgehenden Vertikalen dachten wir uns Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_{10}$ wirken, proportional mit den in ihnen liegenden Ordinaten der Belastungscurve. Wir nahmen je ein Viertel dieser Ordinaten und trugen sie zu dem Kräftepolygon 0 1 2 3 .... 10 in Figur 74_a) zusammen. Für den Pol C desselben construirten wir dann auf die bekannte Weise das Seilpolygon 0 I II ... X XI, hier die angenäherte Seilcurve.

Für diese gilt nun alles das, was in §. 48 in Bezug auf das Seilpolygon gesagt wurde. Wenn man die Schlusslinie A'B' zieht, und durch den Pol C des Kräftepolygons die Parallele CT dazu, so theilt diese die Kräftesumme 0 10 in die beiden Auflagerdrücke 0 T und T 10. Wenn diese beiden Kräfte im entgegengesetzten Sinne in den Unterstützungspunkten am Balken angebracht werden, so wird dieser dadurch in's freie Gleichgewicht gesetzt; das Kräftepolygon T 0 1 2 .... 9 10 T sowohl, als das Seilpolygon A' I II ... IX X B' A' schliessen sich.

Für irgend einen Querschnitt y des Balkens erhält man die Summe der ausser ihm, und zwar links von ihm gelegenen Kräfte, wenn man durch den Punkt η, wo die durch ihn gelegte Vertikale die Seilcurve trifft, eine Tangente $\eta\alpha$ an diese zieht und durch den Pol des

Kräftepolygons eine Parallele C7 dazu. Die Strecke T7, welche zwischen dem Schnittpunkt der letzteren mit der Kräftelinie und dem Theilungspunkt T, dem Anfangspunkt des oben genannten geschlossenen Kräftepolygons liegt, ist, in dem Sinne von letzterem zu ersterem Punkt genommen, die gesuchte Summe oder die „Transversalkraft" des Querschnitts y. Ihre Lage ist dadurch bestimmt, dass sie durch den Schnittpunkt α der obigen Tangente an die Seilcurve mit der Schlusslinie A'B' hingurchgehen muss, durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten B'A' und $\eta\alpha$. — Für die andere, rechte Seite des Querschnitts erhält man die genau gleiche, aber in derselben durch α gehenden Vertikalen entgegengesetzt liegende Transversalkraft, wesshalb wir in der Folge immer nur von einer Seite des Querschnitts sprechen wollen, von derjenigen, von welcher her die Kräfte gezählt und im Kräftepolygon aufgetragen werden.

Das Gesammtdrehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts y wirkenden Kräfte um einen Punkt oder vielmehr um eine Horizontalaxe in diesem Querschnitt wird durch den Abschnitt $m\eta$ repräsentirt, welcher zwischen der Schlusslinie A'B' und der Seilcurve auf der Vertikalen liegt, welche durch den Querschnitt hindurchgeht. Es ist auf eine Momentenbasis, gleich der senkrechten Entfernung des Poles C im Kräftepolygon von der Kräftelinie, reducirt. Den gefährlichen Querschnitt, in welchem das Drehungsmoment der ausser ihm liegenden Kräfte am grössten ist, findet man, indem man eine Tangente parallel zur Schlusslinie A'B' an die Seilcurve legt. Der gesuchte Querschnitt liegt in der Vertikalen durch den Berührungspunkt dieser Tangente. Letzterer ist in Fig. 74b) der Punkt VI, und desshalb liegt bei 6 der gefährliche Querschnitt. Indem man sich also den Querschnitt von dem linken Ende A des Balkens gegen den gefährlichen Querschnitt hereinrücken denkt, wird die Summe der ausser ihm wirkenden Kräfte immer kleiner, und die Mittelkraft derselben fällt immer weiter, nach links, hinaus; das Drehungsmoment aber wird immer grösser. Im gefährlichen Querschnitt wird jene Kräftesumme Null, die Mittelkraft fällt in unendliche Entfernung, das Drehungsmoment ist am grössten. Ueber diesen Querschnitt hinaus, nach rechts hinüber, wird die Summe der Transversalkräfte wieder grösser, erhält aber das entgegengesetzte Vorzeichen; zugleich fällt die Mittelkraft auf die entgegengesetzte rechte Seite; sie behält also die nämliche Drehrichtung, und das Drehungsmoment, dargestellt durch die bekannten Abschnitte, wird kleiner und kleiner, bis es am rechten Ende des Balkens zu Null wird.

In unserer Figur dachten wir uns die Längen im Maassstabe von 1 Centimeter gleich 1 Meter aufgetragen. Bei den Ordinaten der Belastungs-Curve repräsentire 1 Centimeter 2000 Kilogramm pro laufenden Meter. Da wir die Balkenlänge AB, gleich 8 Meter, in 10 gleiche Theile von je $0{,}8^m$ Länge theilten, so repräsentirt jeder Centimeter auf den mittleren Parallelen der Trapeze ein absolutes Gewicht von $0{,}8 \times 2000 = 1600^k$. Diese Parallelen viertelten wir, bevor wir sie in's Kräftepolygon trugen; desshalb stellt in diesem jeder Centimeter eine Kraft von 6400^k dar. Die Entfernung des Punktes C endlich von der Kräftelinie beträgt 3 Centimeter. Jeder Centimeter der reducirten Momente repräsentirt folglich 19200 Meter-Kilogramm.

§. 102. Wenn die stetig vertheilte Belastung zugleich gleichmässig über die Länge des Balkens vertheilt ist, so wird die Belastungs-Curve eine zur Abscissenaxe parallele Gerade, und das Seilpolygon geht in eine Parabel über, deren Axe vertikal gerichtet ist. Letzteres wurde bereits bei einer anderen Gelegenheit im §. 66 bewiesen. Vermöge einer Eigenschaft der Parabel, welche in demselben Paragraphen angeführt wurde, kann man sie etwas einfacher construiren, als es dort in Fig. 54, Taf. IX und oben für die Seilcurve bei stetig vertheilter Last überhaupt geschah: nämlich aus Tangenten und deren Berührungspunkten. Nachdem man die Gesammt-

belastung $0\mathfrak{p}$ (Fig. 54_a)) aufgetragen und den Pol C angenommen, zieht man die Anfangs-Tangente $A'a$ parallel zum Anfangsstrahl 0C, sonst aber beliebig. Durch ihren Durchschnittspunkt a mit der Vertikalen durch die Mitte S des Balkens geht die End-Tangente aB' und ist parallel zum Endstrahl $\mathfrak{p}$C. Um für irgend einen Querschnitt D des Balkens die Tangente an die Parabel zu erhalten, theilt man im Punkte $\mathfrak{d}$ die Gesammtlast in demselben Verhältniss, in welchem der Balken AB durch D getheilt wurde, und zieht durch den Schnittpunkt β der Anfangstangente mit der Vertikalen durch die Mitte D_0 des Balkenstückes AD eine Parallele zum Strahl $\mathfrak{d}$C. Diese ist die gesuchte Tangente und ihr Schnittpunkt d mit der durch D gezogenen Vertikalen ihr Berührungspunkt.

§. 103. **Balken, auf den sowohl concentrirte Kräfte, als auch stetig vertheilte Lasten wirken.** — In der Regel kommen neben einer continuirlich vertheilten Belastung, welche schon durch das Eigengewicht eines Trägers gebildet wird, concentrirte Kräfte vor, Eisenbahnzüge z. B. oder einzelne Locomotiven, die auf einer Brücke stehen oder über dieselbe fahren und dergl. In Fig. 74_b), Taf. XIII haben wir angenommen, dass neben der Last, deren Vertheilung durch die Curve acb dargestellt wird, vier Kräfte P'_1, P'_2 ... P'_4 in den mit 1', 2' ... 4' bezeichneten Punkten auf den Balken AB wirken. Dann sollte das Kräftepolygon eigentlich so gezeichnet werden, dass auf die stetig vertheilte Last zwischen A und 1' die concentrirte Kraft P'_1 folgt, nach dieser wieder die auf das Stück 1' 2' treffende continuirliche Belastung des Balkens u. s. f. Das zugehörige Seilpolygon würde dann aus einzelnen krummlinigen Stücken zusammenzusetzen sein, die im Falle einer gleichmässigen Vertheilung der continuirlichen Last Stücke von Parabeln werden würden.

Aber wenn man sich erinnert, dass Parallelkräfte bei ihrer Vereinigung einfach zu einander zu addiren sind, ebenso ihre Drehungsmomente um irgend einen Punkt ihrer Ebene, so kann man im vorliegenden Falle die continuirlichen und die concentrirten Kräfte, jede Art für sich, behandeln und hat dann schliesslich nur die beiden Resultate einfach zu einander hinzuzufügen. So wurde, wie schon in §. 101 beschrieben, in Fig. 74 aus der stetig vertheilten Belastung das Kräftepolygon 0 1 2 ... C und das Seilpolygon A' I II ... B' construirt. Ebenso wird man hierauf die concentrirten Kräfte in ein Kräftepolygon 0' 1' 2' ... 4' zusammentragen und den Pol C'' desselben, der gleichen Momentenbasis halber, in derselben Entfernung von der Kräftelinie annehmen, wie den Pol C im ersten Kräftepolygon, sonst aber vorläufig beliebig. Zeichnet man alsdann das zugehörige Seilpolygon A' I'' II'' .. B'' und dessen Schlusslinie A'B'', sowie die Parallele C''T' dazu, so folgt: der gesammte Auflagerdruck in A ist 0T + 0'T', der in B gleich T 10 + T'4'. Von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Sinne sind die Auflager-Reaktionen dortselbst. Letztere, an dem Balken angebracht, setzen ihn in's freie Gleichgewicht. — Für irgend einen Querschnitt y ist die Summe der ausser ihm thätigen Kräfte zusammengesetzt aus den beiden Componenten: T7, welche durch den Durchschnittspunkt a, und T'3', welche durch den Durchschnittspunkt a'' der betr. äussersten Seilpolygonseiten hindurchgeht. Um diese Componenten miteinander zu verbinden, construirt man das Kräftepolygon T7$\mathfrak{b}$C aus ihnen, indem man 7$\mathfrak{b}$ gleich T'3' macht, und alsdann das zugehörige Seilpolygon $0\,a\,\beta\,\gamma$, durch dessen Schnittpunkt γ der äussersten Polygonseiten die fragliche Resultante hindurchgehen muss. Diese Construktion würde selbstverständlich die nämliche bleiben, wenn die beiden Schnittpunkte a und a'' auf verschiedene Seiten des Balkens fallen würden, wie dies möglich ist. Die Componenten würden dann entgegengesetzten Sinn haben und müssten subtrahirt werden, um ihre Resultante zu erhalten.

Das gesammte reducirte Drehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts y thätigen Kräfte ist gleich der Summe der Abschnitte $m\eta$ und $m''\eta''$, welche auf der durch ihn gezogenen Vertikalen zwischen den Schlusslinien und bezw. der Seilcurve und dem Seilpolygon liegen. Der gefährliche Querschnitt liegt da, wo diese Summe ein Maximum wird. Um die Summirung der Abschnitte leicht vornehmen und damit den Maximalmomenten-Querschnitt aufsuchen zu können, ist es vortheilhaft, statt des Polygons A' I'' II'' .... B'' ein anderes zu zeichnen, dessen Schlusslinie mit A'B' zusammenfällt. Dies kann nach §. 97 leicht geschehen. Zieht man durch den Punkt T' des Kräftepolygons 0' 4' C'' eine Parallele T' C' zu A' B', und nimmt man darin den Punkt C' so an, dass er von der Kräftelinie dieselbe Entfernung, gleich der Momentenbasis, hat wie die Pole C'' und C, so ist 0' 4' C' das neue Kräftepolygon und das zugehörige Seilpolygon A' I' II'... B' leicht zu zeichnen. Man kann dabei den Satz benützen, dass sich seine und die gleichvielten Seiten des Polygons A' I'' II''... B'' auf der durch A' gehenden Vertikalen schneiden müssen. Nun repräsentirt der Abschnitt $\eta' \eta$ zwischen der Seilcurve und dem Seilpolygon auf der durch den Querschnitt y gezogenen Vertikalen das gesammte reducirte Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte; und man findet mit dem Zirkel leicht die Stelle, wo dieser Abschnitt ein Maximum wird, d. h. wo der gefährliche Querschnitt liegt. Als Anhaltspunkt hiefür mag die Bemerkung dienen, dass derselbe nothwendig immer zwischen die Maximalmomenten-Querschnitte, welche einzeln für die continuirliche und für die concentrirte Belastung auf bekannte Weise gefunden werden, zu liegen kommt oder mit einem der letzteren selbst zusammenfällt. Im Falle der Fig. 74 fällt der gefährliche Querschnitt mit dem Maximalmomenten-Querschnitt der concentrirten Kräfte zusammen, der bei 2' liegt.

§. 104. Andere Methode, um die im vorigen §. behandelten Aufgaben zu lösen in dem Falle, wo die continuirliche Belastung gleichmässig vertheilt ist. — In dem Falle, wo die continuirliche Belastung gleichmässig vertheilt ist, kann man die im vorigen §. gepflogenen Untersuchungen auch durchführen, ohne eine Curve zeichnen zu müssen. Da das hiebei einzuschlagende Verfahren namentlich bei Aufsuchung des gefährlichen Querschnitts sehr rasch zum Ziele führt, so möge es hier kurz noch beschrieben werden.

Wenn man auf der Länge des Balkens als Abscissenaxe Ordinaten errichtet, gleich der Summe der ausserhalb des betreffenden Querschnitts wirkenden Kräfte, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten unter den obigen Voraussetzungen eine gerade Linie, die gegen die Abscissenaxe eine grössere oder kleinere Neigung besitzt, je nachdem die auf die Längeneinheit treffende continuirliche Last grösser oder kleiner ist. An den Stellen, wo concentrirte Kräfte wirken, setzt jene Verbindungslinie treppenförmig ab. Da an der Stelle, wo der gefährliche Querschnitt liegt, die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte Null wird, so wird diese Stelle durch den Durchgangspunkt jener Linie durch die Abscissenaxe angegeben. Diese Linie ist aber sehr leicht zu zeichnen.

In Fig. 76, Taf. XIV sei AB ein Balken, der eine gleichmässig vertheilte Last und die concentrirten Kräfte $P_1, P_2 \dots P_4$ trägt. Die von jener herrührenden Auflagerdrücke sind von vornherein bekannt, sie sind beiderseits gleich der Hälfte derselben. Um die Auflagerdrücke zu finden, die von den concentrirten Kräften herrühren, zeichnet man das Kräftepolygon 0 1 2...4 aus denselben und hiezu für einen beliebigen Pol C das Seilpolygon A' I II... B' und die Parallele CT zur Schlusslinie A'B' desselben. Durch den Schnittpunkt T jener Parallelen mit der Kräftelinie zieht man eine Horizontallinie TA_0, gleich der Länge des Balkens, und nimmt diese als Abscissenaxe. Es ist einleuchtend, dass es vortheilhaft ist, die Kräftelinie 0 4 in die Vertikale

durch den Unterstützungspunkt B zu legen; dann fällt der Punkt A_0 in die Vertikale durch A, und die Punkte 1_0, 2_0 ... 4_0 der Abscissenaxe, welche die Stellen bezeichnen, wo die concentrirten Kräfte P_1, P_2 ... P_4 wirken, fallen in die Vertikalen durch die Angriffstellen 1, 2 ... 4 jener Kräfte.

Die in A_0 zu errichtende Ordinate $A_0 A'_1$ stellt die ganze Auflager-Reaktion daselbst vor und ist folglich gleich TO + der Hälfte der continuirlichen Belastung. Zwischen A_0 und 1_0 neigt sich die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten gegen die Abscissenaxe um einen von der Grösse der gleichmässig vertheilten Last abhängigen Winkel. Diese Neigung ist leicht zu finden; sie ist dieselbe wie die der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks A_0TU, dessen eine Kathete die Balkenlänge ist, und dessen andere Kathete TU die continuirliche Last repräsentirt. $A'_1 1'$ ist also einfach parallel zu A_0U zu ziehen. Bei 1' findet ein Sprung statt, so dass 1' 1'' gleich der concentrirten Kraft P_1 wird; 1'' 2' läuft dann wieder parallel zu A_0U, und so kann die ganze Linie $A'_1 1' 1'' 2' \ldots 4'' B'_1$ mit grösster Leichtigkeit gezeichnet werden. Ihr Schnittpunkt 2_0 mit der Abscissenaxe gibt die Stelle, wo der gefährliche Querschnitt liegt. Dabei hat man sich im Falle unserer Figur die in diesem Querschnitt wirkende Kraft P_2 so getheilt zu denken, wie es im Kräftepolygon durch den Punkt T geschieht, in welchem die Linie CT die Kräftelinie 04 schneidet. Den einen Theil hat man zu den Kräften links, den anderen zu denen rechts von jenem Querschnitt zu rechnen. Die an irgend einer Stelle y_0 errichtete Ordinate $y_0 y'$ gibt die Summe der ausserhalb des betr. Querschnitts y wirkenden Kräfte. Diese Summe ist eine auf- oder abwärts gerichtete Kraft, je nachdem jene Ordinate über oder unter der Abscissenaxe liegt. Noch mehr: der Flächeninhalt zwischen der gebrochenen Linie und der Abscissenaxe, welcher von jener Ordinate $y_0 y'$ und der Anfangsordinate $A_0 A'_1$ begrenzt wird, ist, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, proportional dem Drehungsmoment der ausserhalb des Querschnittes y wirkenden Kräfte, wobei wieder Flächeninhalte, die unterhalb der Abscissenaxe, also rechts vom gefährlichen Querschnitt liegen, als negative Grössen zu rechnen sind. Für den Querschnitt z repräsentirt also die Differenz $A_0 A'_1 1' 1'' 2' 2_0 - 2_0 z_0 z' 3'' 3' 2'' 2_0$ das Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte, anstatt welcher Differenz aber auch die Fläche $z_0 z' 4' 4'' B'_1 T$ genommen werden kann, weil der Gesammtflächeninhalt $A_0 A'_1 1' 1'' 2' 2'' \ldots B'_1 T$, welcher das Drehungsmoment sämmtlicher, auf den Balken wirkender Kräfte um das Ende B desselben repräsentirt, Null ist. Im gefährlichen Querschnitt 2_0 ist also in der That das Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte, repräsentirt durch die Fläche $A_0 A'_1 1' 1'' 2' 2_0$, am grössten.

§. 105. Einfluss einer concentrirten Kraft, indem sie über einen Träger fortschreitet, der bereits von concentrirten Kräften und gleichmässig vertheilten Lasten angegriffen wird. — Wenn zu bereits vorhandenen, stetig vertheilten und concentrirten Kräften, die an einem Träger wirken, eine neue concentrirte Kraft hinzukommt, so ist deren Einfluss nach denselben Grundsätzen zu beurtheilen, die wir schon im §. 103 befolgt haben: man zeichnet nämlich für die neue Kraft ein eigenes Kräfte- und Seilpolygon und fügt die sich ergebenden Kräfte und Momente für irgend einen Querschnitt den schon vorhandenen einfach bei.

In Fig. 76, Taf. XIV haben wir angenommen, dass zu den auf den Balken wirkenden stetig vertheilten und concentrirten Kräften eine neue Kraft hinzukomme, indem sie etwa von links über das Ende A des Balkens hereintritt. Das Kräftepolygon für dieselbe sei 0' 1' C' (Fig. 76c)), und die Entfernung des Poles C' in demselben von der Kräftelinie, die Momentenbasis, so gross wie in Fig. 76a). Für irgend eine Stellung P'_1 dieser Kraft ist alsdann A' I' B'' das Seilpolygon,

und die zu seiner Schlusslinie $A'B''$ gezogene Parallele $C'T'$ in Fig. 76c) theilt die Kraft $0'1'$ in die beiden Stücke $0'T'$ und $T'1'$, welche den schon vorhandenen Auflagerdrücken hinzugefügt werden müssen. Die Auflager-Reaktionen vergrössern sich also in Folge des Hinzutretens der neuen Kraft in der Stellung P_1' um $T'0'$ in A und $1'T'$ in B.

Nehmen wir nun zunächst einen Querschnitt y, für welchen die Kraft P_1' auf derjenigen seiner beiden Seiten liegt, wo sich der den ursprünglichen Kräften entsprechende gefährliche Querschnitt 2 nicht befindet, so erleidet die Summe der ausserhalb dieses Querschnittes wirkenden Kräfte zu beiden Seiten desselben folgende Aenderungen. Auf derjenigen Seite des Querschnitts, wo die Kraft P_1' liegt und folglich der gefährliche Querschnitt nicht, wo also jene Summe ursprünglich eine aufwärts gerichtete Mittelkraft ist, kommt die nach abwärts gerichtete Kraft $T'1'$ (gleich $T'0' + 0'1'$, algebraisch genommen) hinzu, die fragliche Kräftesumme wird also verkleinert. Auf der anderen Seite des Querschnitts y, wo der gefährliche Querschnitt liegt, wo also jene Kräftesumme ursprünglich abwärts gerichtet ist, kommt die aufwärts gerichtete Kraft $1'T'$ hinzu, absolut genommen tritt also wieder eine Verkleinerung der fraglichen Kräftesumme ein, und zwar in demselben Betrag wie auf der anderen Seite. Das Gesammtdrehungsmoment der ausser ihm liegenden Kräfte wird aber zu beiden Seiten des Querschnitts, absolut genommen, vergrössert, und zwar um den Abschnitt $m'\eta'$. Beide Veränderungen, die der Kräftesumme zu beiden Seiten des Querschnittes und diejenige der Drehungsmomente, werden um so grösser, je näher die Kraft P_1' dem Querschnitt y rückt, ohne ihn zu überschreiten, also am grössten, wenn P_1' über dem Querschnitt y selbst steht.

Ueberschreitet die neu hinzugetretene Kraft den Querschnitt y, so befindet sich derselbe unter den nämlichen Umständen, wie z. B. der Querschnitt z in Bezug auf die vorige Stellung P_1' der neuen Kraft: diese liegt mit dem gefährlichen Querschnitt 2 auf der nämlichen Seite des Querschnittes z. Auf dieser Seite wird der ursprünglich schon abwärts gerichteten Kräftesumme die abwärts wirkende Kraft $T'1'$ (nämlich $T'0' + 0'1'$) hinzugefügt, sie wird also absolut vergrössert; zu der auf der anderen Seite des Querschnitts liegenden, aufwärts gerichteten Kräftesumme kommt aber die aufwärts gerichtete Kraft $1'T'$ hinzu, sie wird also gleichfalls absolut vergrössert; ebenso nimmt das Drehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts z liegenden Kräfte auf beiden Seiten, absolut genommen, zu, und zwar um den Abschnitt $n'\xi'$. Diese Aenderungen werden wieder um so grösser, je näher P_1' an den Querschnitt rückt, am grössten dann, wenn es über ihm steht.

Wenn folglich eine Last über das eine Ende eines Trägers hereintritt, so vermindert sich absolut genommen die Summe der Transversalkräfte in allen zwischen ihr und dem ursprünglichen gefährlichen Querschnitt liegenden Querschnitten, vergrössert sich dagegen in den jenseits des gefährlichen Querschnittes befindlichen, während die Drehungsmomente für sämmtliche Querschnitte sich vergrössern. Diese Aenderungen nehmen für jene Querschnitte sowohl, als auch für diese zu, wenn ihnen die Last näher rückt, für diejenigen Querschnitte also, welche sich diesseits des gefährlichen befinden, wird die Summe der Transversalkräfte absolut genommen am kleinsten, das Drehungsmoment aber am grössten, wenn die Kraft über ihnen steht. Sobald aber die Last einen solchen Querschnitt überschreitet, springt die Summe der Transversalkräfte auf einmal von einem kleinsten in einen grössten Werth über und nimmt bei weiterem Fortschreiten der Last ab, wie die Drehungsmomente auch. Für die jenseits des gefährlichen Querschnitts liegenden Querschnitte nimmt die Kräftesumme absolut zu, sowie auch das Drehungsmoment, je näher ihnen die Last rückt, und beide erhalten einen grössten Werth, wenn die Last über dem betr. Querschnitt

steht. Mit dem Ueberschreiten desselben springt jener grösste Werth für die Transversalkräfte auf einmal in einen kleinsten über und nimmt dann bei weiterem Fortschreiten der Last wieder zu, das Drehungsmoment dagegen ab.

Da beim Hereintreten einer Last auf einen Träger die Summe der Transversalkräfte für die diesseits des gefährlichen liegenden Querschnitte kleiner, für die jenseits gelegenen grösser wird, der gefährliche Querschnitt der gesammten Belastung aber immer da liegt, wo jene Kräftesumme Null ist, so folgt, dass der gefährliche Querschnitt im Allgemeinen einer vom einen Ende hereintretenden Last entgegen rückt. Beide werden sich also an einer bestimmten Stelle treffen. Ueber diese hinaus wird der gefährliche Querschnitt die fortschreitende Last, indem er sich wieder rückwärts bewegt, begleiten, wird mit ihr seine ursprüngliche Stellung überschreiten und ihr bis dahin folgen, wo er mit ihr, wenn sie von der anderen Seite kommen würde, zusammentreffen müsste. Von da an kehrt bei weiterem Fortschreiten der Last der gefährliche Querschnitt wieder zurück, um an seiner ursprünglichen Stelle wieder anzukommen, wenn die Last auf der anderen Seite den Träger verlässt.

Es ist offenbar interessant, die beiden Stellen kennen zu lernen, wo der entgegenrückende gefährliche Querschnitt mit der Last zusammentrifft, und wo er sie wieder verlässt, und diess kann mit Hülfe des Kräftezuges $A_1' 1' 1'' 2' 2'' \dots 4'' B_1'$ in Fig. 76b), Taf. XIV sehr leicht geschehen, vorausgesetzt, dass wie dort die stetig vertheilten Kräfte auch gleichmässig vertheilt sind. Wenn die Kraft P_1', über A hereinkommend, eben nach $1'$ gelangt ist, so erhält man die beiden Theile, in welche sie sich auf die beiden Auflager vertheilt, auch dadurch, dass man am entgegengesetzten Ende B des Trägers senkrecht auf ihn die Strecke TE gleich P_1' aufträgt und durch den Durchschnittspunkt der Verbindungslinie A_0E mit der durch $1'$ gehenden Vertikalen eine Horizontale $A_0' B_0'$ zieht. TB_0' ist dann der von P_1' herrührende Auflagerdruck oder auch die Auflagerreaktion in B. Die gesammte Auflagerreaktion an diesem Balkenende ist nun folglich $B_0' B_1'$, und der ganze jenseitige Kräftezug von B_1' bis $1'''$ kann unverändert bleiben, wenn man nur einfach die Abscissenaxe von A_0T nach $A_0' B_0'$ hinaufrückt. Der gefährliche Querschnitt, welcher wieder durch den Schnittpunkt des Kräftezuges mit der Abscissenaxe erhalten wird, ändert hier in Folge des überwiegenden Einflusses der Kraft P_2 seine Lage nicht; er kommt der Kraft P_1' nicht entgegen, sondern erwartet sie, bis sie bei 2 über ihm steht, und die neue Abscissenaxe, bestimmt durch den Schnittpunkt des Kräftezuges mit A_0E, die Lage $A_0'' B_0''$ hat.

Wenn dagegen die Kraft P_1', von B hereintretend, etwa nach z gekommen ist, so wird die Art und Weise, wie sie sich auf die Auflager vertheilt, bestimmt, indem man wieder auf der entgegengesetzten Seite A_0E' gleich P_1' aufträgt und durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie $E'T$ mit der durch z gezogenen Vertikalen eine Horizontallinie $A_0''' B_0'''$ zieht. TB_0''' ist dann gleich der Vergrösserung der Auflagerreaktion durch die Kraft P_1' an der Stütze A und der ganze jenseitige Kräftezug $A_1' 1' 1'' \dots\dots$ bis z' kann unverändert bleiben, wenn die Abscissenaxe von A_0T nach $A_0''' B_0'''$ herunter gerückt wird. Dieselbe durchschneidet den Kräftezug in x', entsprechend dem Querschnitt x_0 oder x, und dies zeigt, dass der gefährliche Querschnitt der über B hereinkommenden Kraft P_1' von 2 bis x entgegenkommt, wenn diese bis z hereinrückt. Bei weiterem Fortschreiten der Kraft P_1' rückt ihr der gefährliche Querschnitt noch mehr entgegen, und beide treffen sich offenbar an der Stelle v_0 oder v, welche in der Vertikalen liegt, die durch den Schnittpunkt v' der Verbindungslinie $E'T$ mit dem Kräftezug hindurchgeht.

Um also die oben besprochenen zwei interessanten Punkte zu finden, hat man nichts weiter zu thun, als in der Fig. 76b), die auf bekannte Weise (§. 104) aus den ursprünglichen Be-

lastungen gezeichnet wurde, an beiden Enden der Abscissenaxe A_0T und senkrecht auf diese die neu hinzukommende Last abzutragen, und zwar im entgegengesetzten Sinne der dort befindlichen Ordinaten. Verbindet man dann die Endpunkte dieser abgetragenen Stücke mit den jenseitigen Abscissenaxen-Enden, und sucht die Schnittpunkte mit dem Kräftezug auf, so liegen die gesuchten Stellen in den Vertikalen durch diese Schnittpunkte.

§. 106. Locomotiven-Züge als Belastung von Brückenträgern. — Concentrirte Kräfte kommen in den Anwendungen in der Regel in einer bestimmten Reihenfolge vor. So z. B. diejenigen, welche bei einem Eisenbahnzug oder bei einem Frachtwagen in den Berührungspunkten der Räder mit den Schienen oder mit der Strasse wirken und in dieser Weise auf die Träger einer Eisenbahn- oder Strassenbrücke ausgeübt werden. In einem solchen Falle entsteht dann die Aufgabe, die Wirkung näher zu untersuchen, welche der Eisenbahnzug, um beim ersten Beispiele stehen zu bleiben, auf den Träger ausübt in den verschiedenen Stellungen, welche er während des Ueberführens über denselben möglicherweise einnehmen kann.

Man führt diese Untersuchungen am besten so durch, dass man aus den gegebenen und in gegebener Reihenfolge geordneten vertikalen Kräften das Kräfte- und Seilpolygon construirt, und in letzterem längs einer beliebig angenommenen horizontalen Linie den Träger, d. h. eine Strecke gleich dessen Spannweite, verschiebt, um ihm so nach und nach die Lagen gegen jene Kräfte zu geben, welche umgekehrt diese gegen ihn während der Bewegung des Zuges annehmen.

Die bedeutendste möglicherweise vorkommende Belastung von Eisenbahnbrücken bilden Züge von Locomotiven, von denen man natürlich die schwerste Art den Berechnungen der Dimensionen eines Brückenträgers zu Grunge legen muss. Als Norm für solche schwere Maschinen wird gewöhnlich die sogenannte Engerth'sche Locomotive genommen. Die Dimensionen derselben, soweit sie hier in Betracht kommen, und die Vertheilung des Gesammtgewichtes auf die einzelnen Axen geben wir in folgenden abgerundeten Zahlen. Die Abstände der drei Locomotivaxen untereinander betragen je 1,10 Meter, derjenige der beiden Tenderaxen ist 2,50 Meter. Die vordere Tenderaxe ist von der hintersten Locomotivaxe um 1,20 Meter entfernt, das Ende des vorderen Puffers an der Locomotive von deren Vorderaxe um 2,50 Meter, das Ende des hinteren Puffers am Tender von der hinteren Tenderaxe um 2,20 Meter. Die Gesammtlänge der Locomotive mit Tender ist also 10,6 Meter. Jede Locomotivaxe ist mit 13 Tonnen (à 1000 Kilogramm), jede Tenderaxe mit 8,5 Tonnen belastet.

In Fig. 77, Taf. XV wurde angenommen, dass zwei solche Locomotiven, mit ihren Kaminen gegeneinander gekehrt, zusammengestellt worden seien und alsdann das Kräfte- und Seilpolygon construirt; in Fig. 79, Taf. XVI geschah dasselbe für einen Zug der gleichen Locomotiven, die unmittelbar aufeinander folgend ihre Vorderseiten nach links hin kehren. Die in den Berührungspunkten der Räder wirkenden Belastungen sind in beiden Figuren, in der Reihenfolge von links nach rechts, mit P_1, $P_2 \ldots$ bis P_{10} bezw. P_{20} bezeichnet. Der Längenmassstab ist in Fig. 77 ein Centimeter gleich 1 Meter, der Kräftemassstab 1 Centimeter = 10 Tonnen. Die Kräfte liegen bei der in dieser Figur getroffenen Anordnung symmetrisch um einen Mittelpunkt, den Zusammenstossungspunkt der beiden Vorderpuffer an den Locomotiven. Der Pol im Kräftepolygon wurde desshalb der Mitte der Kräftelinie gegenüber angenommen, und das Seilpolygon konnte so gezeichnet werden, dass seine äussersten Seiten durch die beiden Hinterpuffer der Tender gehen, und dass es symmetrisch um eine Mittellinie liegt. Die Entfernung des Pols von der Kräftelinie ist 5 Centimeter und daher der Massstab für die Momente 1 Centimeter gleich 50 Metertonnen. In Figur 79 ist der Längenmassstab $\frac{1}{2}$ Centimeter = 1 Meter und der Kräftemassstab $\frac{1}{2}$ Centimeter

= 10 Tonnen. Die Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie beträgt 5 Centimeter = 10 Meter oder 100 Tonnen. Der Momentenmassstab ist folglich $\frac{1}{2}$ Centimeter = 100 Meter-Tonnen.

Bei den schon oben angedeuteten Untersuchungen werden wir in den Figuren 77b), Taf. XV und 79b), Taf. XVI die Spannweite längs der Horizontallinie XX verschieben. Wenn dann für irgend eine Stellung dieser Spannweite, z. B. ss in Fig. 79b), wo also die 13 Räder P_4 bis P_{16} auf ihr stehen, Vertikale durch ihre Endpunkte gezogen werden, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte $\sigma\sigma$ dieser Vertikalen mit dem Seilpolygon die Schlusslinie des zugehörigen Theils des letzteren. Eine Parallele zu derselben durch den Pol des Kräftepolygons theilt folglich die Summe der Lasten, welche auf jenen Rädern ruhen, in die beiden Theile, in welchen sie sich als Auflagerdrücke auf die beiden Stützpunkte überträgt; daraus folgt dann sehr leicht die Summe der ausserhalb eines gegebenen Querschnitts wirkenden Kräfte; und deren Drehungsmoment endlich um irgend einen Punkt oder vielmehr um eine horizontale Queraxe des Querschnitts ist gleich dem Abschnitt, welcher auf der durch den Querschnitt gezogenen Vertikalen zwischen jener Schlusslinie und dem Seilpolygon liegt. Wir werden in der Folge der Kürze halber jene Kräftesumme für einen gegebenen Querschnitt „Summe der Transversalkräfte" und dieses Drehungsmoment einfach das „Drehungsmoment für den betreffenden Querschnitt" nennen.

§. 107. Parabel, welche von der Schlusslinie des Seilpolygons umhüllt wird, während sich ein Zug von einer bestimmten Anzahl Axen über einen Träger von gegebener Spannweite bewegt. — Während bei der Verschiebung der Spannweite längs der Horizontallinie XX (Fig. 77b), Taf. XV und Fig. 79b), Taf. XVI) die Endpunkte der Schlusslinie auf den nämlichen beiden Seilpolygonseiten bleiben, so dass also weder eines von den eben auf dem Träger befindlichen Rädern über denselben hinausrollt, noch ein neues auf ihn aufläuft, umhüllt jene Schlusslinie nach einem bekannten geometrischen Satz eine Parabel. Diese Parabel hat einige, für die nachfolgenden Untersuchungen wichtige Eigenschaften, die wir mit Hülfe der Fig. 78, Taf. XV erläutern wollen. In derselben sei XX wieder die horizontale Linie, längs welcher die Spannweite verschoben wird, αM und αN seien die beiden äussersten Seilpolygonseiten, auf denen dabei die Endpunkte der Schlusslinie fortrücken. Für irgend eine Lage ss der Spannweite ist folglich $\sigma\sigma$ die zugehörige Schlusslinie. Um deren Berührungspunkt β mit der umhüllten Parabel zu finden, gehen wir von der Stellung $s_0 s_0$ der Spannweite aus, in welcher ihre Mitte c_0 in die Vertikallinie fällt, welche durch den Schnittpunkt α der äussersten Polygonseiten geht. In dieser Stellung berührt die zugehörige Schlusslinie $\sigma_0\sigma_0$ die umhüllte Parabel in ihrem Halbirungspunkt ω_0 und hat die Eigenschaft, dass sich auf ihr die Halbirungspunkte aller übrigen Tangenten befinden, vorausgesetzt, dass diese nur bis an die äussersten Polygonseiten αM und αN gezogen werden. Eine Vertikale durch den Mittelpunkt c der Spannweite in ihrer Stellung ss geht folglich durch den Schnittpunkt γ der beiden Schlusslinien $\sigma\sigma$ und $\sigma_0\sigma_0$ hindurch. Von diesem Schnittpunkte aus gehen zwei Tangenten an die Parabel, deren Berührungspunkte so liegen, dass die durch sie hindurchgezogenen Vertikalen beiderseits gleichweit von der Vertikallinie cγ entfernt sind. Macht man folglich cb gleich cc_0, so liegt in der durch b gezogenen Vertikallinie der Berührungspunkt β der Tangente $\sigma\sigma$.

Umgekehrt, will diejenige Stellung ss der Spannweite gefunden werden, in welcher die Vertikallinie durch einen gegebenen Punkt b (Querschnitt) derselben die zugehörige Schlusslinie in ihrem Berührungspunkt mit der Parabel trifft, so muss die Mitte c der Spannweite mitten zwi-

schen der Vertikalen αc_0 durch den Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten und jenem Querschnitt gelegen sein; man hat folglich $c_0 s$ (links) gleich $b s$ (rechts) zu machen.

Wenn man die Spannweite aus dieser Stellung $s s$ fortrückt und zugleich mit ihr den Querschnitt b, durch den man immer Vertikallinien zieht, so liegen die Schnittpunkte aller dieser Vertikallinien mit den zugehörigen Schlusslinien auf der Tangente $\sigma\sigma$. Wenn also b'_1 als solcher Schnittpunkt betrachtet wird, $b_1 b'_1$ also die zugehörige Vertikale ist, so muss der Querschnitt b von b nach b_1 gerückt sein und um ebensoviel die ganze Spannweite von $s s$ nach $s_1 s_1$, wo $s s_1 = b b_1$ ist. Aber b'_1 ist natürlich jetzt nicht mehr Berührungspunkt der Schlusslinie $\sigma_1 \sigma_1$ mit der Parabel. Derselbe, δ_1, muss erst auf die oben schon erörterte Weise gefunden werden.

§. 108. Drehungsmomente, welche ein Zug von bestimmter Anzahl Axen in den verschiedenen Querschnitten eines Trägers von gegebener Spannweite hervorbringt, während er sich über den Träger bewegt. — Indem man sich vorstellt, dass eine bestimmte Reihe gegebener concentrirter Kräfte, belastete Räder also, um bei obigen Beispielen stehen zu bleiben, auf einen gegebenen Träger verschoben werden, sind es besonders folgende Fragen, deren Beantwortung für die Berechnung der Dimensionen des Trägers von Wichtigkeit sind.

1) Wenn eine bestimmte Anzahl von Rädern auf einem Träger von bestimmter Spannweite verschoben werden so, dass keines über einen der Stützpunkte hinausrückt, aber auch kein neues auf den Träger aufrollt: bei welcher Stellung findet für einen gegebenen Querschnitt das grösste Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte statt, und wie gross ist es?

2) Bei welcher Stellung des Zuges findet, unter denselben Voraussetzungen wie oben, unter einer bestimmten Stelle desselben, d. h. für den Querschnitt, über welchem sie steht, das grösste Drehungsmoment statt?

3) Wie gross ist überhaupt, immer unter denselben Voraussetzungen wie bei 1) und alle die verschiedenen Querschnitte miteinander verglichen, das grösste vorkommende Maximalmoment; in welchem Querschnitt und bei welcher Stellung des Zuges findet es statt?

4) Wenn von vornherein die Anzahl der Räder, welche auf den Träger zu stehen kommen sollen, nicht bestimmt ist, wie viel sind auf denselben zu bringen, und welche Stellung ist denselben zu geben, damit das Drehungsmoment im jeweiligen gefährlichen Querschnitt am grössten wird? Wo liegt dann dieser Querschnitt, welche Stellung nimmt der Zug ein und wie gross ist jenes grösste Maximalmoment?

Die drei ersten Fragen sind leicht mit Hülfe der im vorigen §. erörterten Eigenschaften der Parabel zu beantworten, welche von den Schlusslinien des Seilpolygons für die gegebenen Kräfte umhüllt wird, während diese Kräfte über der Spannweite verschoben werden oder die Spannweite unter ihnen.

Denken wir uns behufs Beantwortung der ersten Frage die gegebene Spannweite, indem sie längs einer Horizontallinie XX (Fig. 78, Taf. XV) im Seilpolygon verschoben wird, in solcher Lage $s s$ gezeichnet, dass die vom gegebenen Querschnitt b herabgefällte Vertikale die zugehörige Schlusslinie in ihrem Berührungspunkte β mit der Parabel schneidet, dann liegen auf dieser Schlusslinie alle die Schnittpunkte, in welchen bei den anderen Stellungen der Spannweite die vom gegebenen Querschnitt herabgefällten Vertikalen die zugehörigen Schlusslinien treffen. In diesen Vertikalen, zwischen den betreffenden Schlusslinien und dem Seilpolygon, liegen aber die reducirten Drehungsmomente für den Querschnitt in seinen verschiedenen Lagen. Das grösste dieser Momente ist also dasjenige, welches gleich dem grössten Abstand ist, der, vertikal gemessen, zwischen jener erstgezeichneten Schlusslinie und dem Seilpolygon stattfindet; er ist

immer bei einer Ecke des letzteren zu suchen. Mit ihm hat man zugleich die Stellung des Querschnitts und die Lage der Spannweite selbst in Bezug auf die gegebenen Lasten gefunden. Diese ist immer so, dass eines der Räder über den gegebenen Querschnitt zu stehen kommt.

In Fig. 77b), Taf. XV haben wir beispielsweise vorausgesetzt, dass die 4 Räder P_6 bis P_9 auf eine Spannweite von 6 Meter so gebracht werden sollen, dass in dem Querschnitt, welcher 2 Meter vom linken Ende entfernt ist, das grösstmöglichste Drehungsmoment stattfindet. Wir legten desshalb die Spannweite $t_1 t_1$ so, dass ihre Mitte m_1, wie sie 1 Meter vom gegebenen Querschnitt entfernt ist, auch 1 Meter vom Durchnittspunkt α der äussersten Seilpolygonseiten absteht, welcher Durchschnittspunkt hier auf der Linie XX selbst liegt. Das Stück αt_1 (rechts) wurde also gleich $q_1 t_1$ (links) gemacht, mit q_1 den gegebenen Querschnitt bezeichnet. Wir zogen dann die Schlusslinie $t_1 \tau_1$ und suchten diejenige Polygonecke, deren vertikal gemessener Abstand von jener am grössten ist. Es ist dies die Ecke VII. Daraus folgt sofort die Lage q, welche der gegebene Querschnitt hiebei hat, und diejenige tt der Spannweite selbst, indem man $t_1 t = q_1 q$ macht. Das Maximalmoment beträgt im vorliegedem Fall 0,84 Centimeter oder mit Berücksichtigung des im §. 106 für die Fig. 77 bereits angegebenen Massstabes gleich 42 Meter-Tonnen.

Die in der zweiten Frage geforderte Stellung des Zuges auf dem Träger, oder umgekehrt, die entsprechende Lage der Spannweite ist die, wo die Vertikale, welche durch die bestimmte Stelle S (Fig. 77b), Taf. XV) des Zuges hindurchgeht, die Schlusslinie, welche jener Lage zugehört, in ihrem Berührungspunkt mit der Parabel schneidet: denn dann ist das stets auf jener Vertikalen zu messende Drehungsmoment am grössten; alle anderen Schlusslinien schneiden die Vertikale in Punkten, die zwischen jenem Berührungspunkt und dem Seilpolygon liegen. Nach den aus vorigem §. bekannten Eigenschaften der Parabel muss also die Mitte m_2 des Trägers mitten zwischen dem Schnittpunkt α der äussersten Seilpolygonseiten und dem Schnittpunkt s jener Vertikalen mit der Axe XX liegen, wobei wir voraussetzen, dass es sich wieder um die vier Räder P_6 bis P_9 handle. Geben wir folglich dem Träger, wie vorhin, eine Spannweite von 6 Meter, so ist daraus seine Lage $t_2 t_2$, sowie die entsprechende Schlusslinie $t_2 \tau_2$ und das gesuchte Maximalmoment leicht zu finden. Es ist im vorliegenden Fall gleich 0,92 Centimeter = 46 Meter-Tonnen und findet dann statt, wenn die gegebene Stelle des Zuges über dem Querschnitt s der Spannweite $t_2 t_2$ steht.

Die dritte Frage endlich ist sehr leicht zu beantworten, wenn die Parabel, welche die Schlusslinien während der Verschiebung der Spannweite umhüllen, gezeichnet ist. Der grösste Abstand, welcher, vertikal gemessen, zwischen dieser Parabel und dem Seilpolygon stattfindet, und der stets unter einer Ecke des letzteren zu suchen ist, gibt das grösste Maximalmoment, welches überhaupt in der gegebenen Spannweite vorkommen kann. Dieses findet also stets in einem Querschnitt statt, über welchem ein Rad steht. Ist jene Polygonecke für die nämlichen vier Räder P_6 bis P_9, die wir schon bisher betrachtet haben, und für die nämliche Spannweite von 6 Meter die mit VII bezeichnete, so ist die Lage der Spannweite und jenes gefährlichen Querschnitts in ihr leicht nach §. 107 zu finden. Der letztere liegt da, wo die durch VII gezogene Vertikale die Linie XX schneidet, in q. Und weil die zur gesuchten Lage der Spannweite gehörige Schlusslinie die Vertikale durch q da schneiden muss, wo sie selbst die Parabel berührt, so muss die Mitte m_3 der Spannweite mitten zwischen q und α, dem Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, liegen. Die Endpunkte t_3, t_3 der Spannweite sind dadurch ebenfalls bekannt.

Wenn freilich die Parabel nicht gezeichnet ist und auch nicht gezeichnet werden will, dann kann man jenes grösste Maximalmoment nur durch Probiren auffinden, indem man eben

einige der Polygonecken als die richtigen nimmt und die auf obige Weise für sie gefundenen Maximalmomente mit einander vergleicht. Einige Anhaltspunkte hiebei gewähren folgende Betrachtungen. Wenn die Last über einen Träger gleichmässig ausgebreitet ist, so fällt der Maximal-Momenten-Querschnitt in die Mitte und zugleich in die Vertikale, welche durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten gezogen wird. Das Seilpolygon selbst wird eine Parabel. Je ungleichförmiger die Last vertheilt ist, desto mehr rückt der Maximalmomenten-Querschnitt nach der schwerer belasteten Seite hin, der Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten zwar auch, aber nicht in demselben Masse. Immerhin aber wird man, bei nicht sehr ungleichmässig vertheilter Belastung, den Maximalmomenten-Querschnitt in der Nähe der Vertikalen durch jenen Durchschnittspunkt suchen dürfen, d. h. also in der Nähe der Mittelkraft der auf dem Träger lastenden Kräfte. So waren wir in unserem obigen Beispiel berechtigt, die Ecke VII, welche der Vertikalen durch den Schnittpunkt a am nächsten liegt, als diejenige anzunehmen, unter welcher der Maximalmomenten-Querschnitt zunächst zu suchen ist. Auf jeden Fall kann durch obige, für die Ecke VII gezeigte Construktion, indem man sie für einige in der Nähe von a gelegene Polygonecken ausführt, der Querschnitt gefunden werden, in dem das grösste Maximalmoment stattfindet.

Bei der Lastvertheilung, wie wir sie in Fig. 77 vorausgesetzt haben, gibt immer diejenige Polygonecke, welche dem Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten zunächst liegt, den in Rede stehenden Querschnitt, für die Räder P_6 bis P_9 also die Ecke VII. Das grösste Maximalmoment also, welches diese vier Räder auf einem Träger von 6 Meter Spannweite hervorbringen können, ist gleich VIIr = 0,95 Centimeter = 47,5 Meter-Tonnen. Es findet statt, wenn der Träger die Lage $t_3\,t_3$ gegen jene Räder hat, und zwar in dem Querschnitt q, über welchem eben das Rad P_7 steht.

§. 109. Ungünstigste Stellung eines Locomotivenzuges auf einem Balken von gegebener Spannweite. — Die Beantwortung der vierten Frage des vorigen §. erfordert eine etwas umständlichere Betrachtung. Die ungünstigste Stellung hat eine gegebene Reihe concentrirter Kräfte, also ein Locomotivenzug auf einem Träger von bestimmter Spannweite dann, wenn er ein möglichst grosses Moment im gefährlichen Querschnitt hervorbringt. Diese Stellung findet man nach dem vorhergehenden §. dadurch, dass in der Regel die Mitte des Trägers mitten zwischen der Vertikalen durch den Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten der wirksamen Belastungen, also mitten zwischen der Mitteldruckslinie der letzteren und zwischen der durch die nächstgelegene Ecke des Seilpolygons gezogenen Vertikalen liegt. Behält man jene Mitte bei, vergrössert aber die Spannweite, so wird das Maximalmoment, welches unter dem jener Polygonecke entsprechenden Rade stattfindet, immer grösser und am grössten dann, wenn die Spannweite die grösste Länge erhält, die möglich ist, ohne dass mehr Räder, als von vornherein angenommen wurde, auf sie geschoben werden.

So ist für die zwei Räder P_4 und P_5 in Fig. 77, welche wir uns auf einem Träger stehend denken, a_1 der Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, durch welche die Mitteldruckslinie geht, und IV die der letzteren zunächst gelegene Polygonecke. Die fast ebenso nahe liegende Ecke V gibt wenigstens kein grösseres Maximalmoment als jene. Bei derjenigen Stellung also, wo jene beiden Räder das grösste Maximalmoment hervorbringen, muss die Mitte c_1 des Trägers mitten zwischen a_1 und der durch IV gezogenen Vertikalen liegen; und je grösser die Spannweite wird, desto grösser wird jenes Maximalmoment, am grössten also dann, wenn $s_1\,s_1$

diese Spannweite ist, wo die durch den linken Endpunkt gezogene Vertikale eben durch die Ecke III geht.

Nimmt man nun das Rad P_3 noch mit auf, so rückt der Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten nach α_2 und fällt hier fast in die durch die Ecke IV gezogene Vertikale. Hier hat man folglich auch die Mitte der Spannweite in ihrer ungünstigsten Stellung zu nehmen. Gehen wir von der nämlichen Spannweite $s_1 s_1$ aus, zu der wir vorhin gelangt sind, machen wir also $s_2 s_2$ mit der Mitte α_2 gleich $s_1 s_1$, so sieht man, dass das zugehörige Maximalmoment, das auf der durch IV gehenden Vertikalen abgeschnitten wird, fast genau so gross ist als das, welches vorhin erhalten wurde, nämlich gleich IVr_2. Für eine kleinere Spannweite, auf der drei Räder stehen, würde man ein kleineres Maximalmoment erhalten, das also auch kleiner wäre, als das grösstmöglichste, das schon durch zwei Räder hervorgebracht werden kann. Die Spannweite $s_1 s_1$ kann also als obere Grenze für diejenigen betrachtet werden, auf welchen schon die zwei Räder P_4 und P_5 das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen können.

Je grösser von $s_2 s_2$ an die Spannweite wird, auf der nun drei Räder stehen, desto grösser wird das Maximalmoment, und am grössten wird es wieder da, wo die Spannweite, deren Mitte immer α_2 bleibt, gleich $s_2' s_2'$ wird, wo die Vertikale durch ihr linkes Ende durch II hindurch geht. Nimmt man jetzt das Rad P_2 mit auf, so rückt der Durchschnittspunkt der äussersten Polygonseiten nach α_3. Derselbe liegt immer noch der durch die Ecke IV gezogenen Vertikalen am nächsten, und folglich müssen die Mitten c_3 der Träger, auf denen die vier Räder P_2 bis P_5 stehen, mitten zwischen α_3 und α_2 liegen, wenn jene die ungünstigste Stellung haben sollen. Gibt man diesen Trägern zunächst wieder die Spannweite $s_2' s_2'$, welche wir vorhin als grösste für drei Räder gefunden haben, macht man also $s_3 s_3$ mit der Mitte c_3 gleich $s_2' s_2'$, so sieht man, dass das grösste Maximalmoment, welches auf der Vertikalen durch IV abgeschnitten wird, wieder fast genau so gross ist als dasjenige, das wir oben schon für $s_2' s_2'$ erhielten. Und daraus folgt ganz ebenso wie vorhin, dass letztere Spannweite die obere Grenze bildet für alle diejenigen, auf welchen die drei Räder P_3 bis P_5 das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen können.

In ganz ähnlicher Weise findet man, dass die Spannweite $s_3' s_3'$ mit der Mitte c_3, für welche die Vertikale durch das linke Ende die Ecke I trifft, die obere Grenze bildet für alle diejenigen, bei welchen schon die vier Räder P_2 bis P_5 das grösstmöglichste Maximalmoment zu erzeugen im Stande sind.

Nachdem man alsdann auch das Rad P_1 aufgenommen, fällt der Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten nach α_4 und liegt zunächst an der durch die Ecke III gezogenen Vertikalen. Man hat folglich c_4, mitten zwischen s_1 und α_4, als Mitte des Trägers zu nehmen, und je grösser man dessen Spannweite macht, desto grösser wird das Maximalmoment. Die grösste Länge aber, welche jene erhalten kann, ehe das Rad P_6 mit auf den Träger kommt, ist die $2 \times c_4 VI$ mit der Mitte c_4, wo das rechte Ende mit VI zusammenfällt. Wenn man dann das Rad P_6 noch mit aufnimmt, so rückt der Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten nach α_5, und der hiedurch gezogenen Vertikalen $\alpha_5 a_5$ liegt die Ecke IV am nächsten. Nun ist also c_5, mitten zwischen α_2 und a_5 als Trägermitte zu nehmen, während diese unmittelbar vorher noch bei c_4 lag. Eben vor dem Aufrollen des Rades P_6 war aber die halbe Spannweite noch $c_4 VI$, und jetzt unmittelbar nach demselben wird sie $c_5 VI$, also beträchtlich kleiner. Da es aber in unserer Absicht liegt, die Spannweiten in ihrer fortschreitenden Vergrösserung zu verfolgen, wollen wir zwei solche miteinander vergleichen, welche vor und nach dem Eintritt des Rades P_6 von gleicher Grösse sind;

die rechtsseitigen Enden derselben, s_4' und s_5, müssen offenbar zu beiden Seiten um die halbe Entfernung der Mitten c_4 und c_5 vom Punkte VI abstehen, und ist folglich $c_4 s_4' = c_5 s_5 = M_1 VI$ zu machen, vorausgesetzt, dass M_1 mitten zwischen den Trägermitten c_4 und c_5 liegt. Eine genaue Construktion zeigt, dass die Maximalmomente für diese beiden Spannweiten fast genau gleichgross sind, und mehr noch, dass das Maximalmoment für eine dritte Spannweite $S_1 S_1$ von der nämlichen Länge, deren Mitte in M_1 liegt, ebenfalls fast die gleiche Grösse erhält, wenn man es nur auf der durch M_1 gezogenen Vertikallinie misst. Es kann folglich $S_1 S_1$ als obere Grenze für diejenige Spannweiten genommen werden, bei denen schon die fünf Räder P_1 bis P_5 das grösstmöglichste Maximalmoment hervorzubringen im Stande sind.

Bei Aufnahme des siebenten Rades P_7 rückt der Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten nach α_6, und der durch denselben gezogenen Vertikalen $\alpha_6 a_6$ liegt die Ecke V am nächsten. Die Trägermitte ist folglich nach c_6, mitten zwischen V und a_6, zu verlegen, während sie unmittelbar vorher noch in c_5 lag. Ist M_2 die Mitte zwischen c_5 und c_6, so ergibt sich ganz auf dieselbe Weise wie vorhin, dass die Spannweite $S_2 S_2$, deren Mitte M_2 ist, und deren rechtes Ende in der Vertikalen durch die Ecke VII liegt, die obere Grenze ist für diejenigen, in welchen schon die sechs Räder P_1 bis P_6 das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen können. Aehnliches gilt für die Spannweite $S_3 S_3$ mit der Mitte M_3 in Bezug auf die sieben Räder P_1 bis P_7 u. s. w. fort.

Wir wiederholen: Es können

bis	zur	Spannweite	$s_1 s_1$	=	2,80^m	schon	die	zwei	Räder	P_4	und	P_5
„	„	„	$s_2' s_2'$	=	4,62^m	„	„	3	„	P_3	bis	P_5
„	„	„	$s_3' s_3'$	=	9,25^m	„	„	4	„	P_2	„	P_5
„	„	„	$S_1 S_1$	=	13,08^m	„	„	5	„	P_1	„	P_5
„	„	„	$S_2 S_2$	=	12,92^m	„	„	6	„	P_1	„	P_6
„	„	„	$S_3 S_3$	=	13,63^m	„	„	7	„	P_1	„	P_7
					etc.		etc.					

das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen. Die Aufnahme des Rades P_6 auf den Träger veranlasst also eher eine Verringerung als eine Vergrösserung des Maximalmomentes, was leicht auch direkt aus der Figur ersichtlich ist.

Hat man nun unter Voraussetzung der bei obigen Betrachtungen zu Grunde gelegten Verhältnisse die vierte Frage des vorigen §. in Bezug auf eine Spannweite von 8 Meter zu beantworten, so ergibt sich aus obiger Uebersicht, dass die vier Räder P_2 bis P_5 auf sie zu stellen sind, ihre Mitte also nach c_3 zu verlegen ist. Daraus folgt sofort die Lage dieser Spannweite $s_3'' s_3''$ gegen jene vier Räder, die zugehörige Schlusslinie $\sigma_3'' s_3''$ und das grösstmöglichste Maximalmoment $IVr_3'' = 1{,}40^{cm} = 70$ Meter-Tonnen, stattfindend in dem Querschnitt α_2. Eine Parallele CT zur Schlusslinie $\sigma_3'' s_3''$, durch den Pol des Kräftepolygons gezogen, theilt die Summe $1\,5 = 47{,}5$ Tonnen der Kräfte P_2 bis P_5 in die beiden Theile, $1T = 25{,}5$ und $T5 = 22{,}0$ Tonnen, welche die Auflagerdrücke repräsentiren. Dieselben Stücke, in entgegengesetzter Richtung genommen, sind gleich den Auflagerreaktionen, und aus diesen erhält man auf bekannte Weise die Transversalkräfte für die einzelnen Querschnitte.

§. 110. **Grösster Werth des Drehungsmomentes, welches ein Locomotivenzug in einem bestimmten Querschnitt eines Balkens von gegebener Spannweite, über den er sich bewegt, hervorbringen kann.** — Bei Trägern mit grosser Spannweite, welche in der Regel nicht durchweg gleiche Querschnitte erhalten, reicht es nicht aus, das grösste Maximalmoment, welches eine gegebene

Reihe concentrirter Kräfte an ihnen hervorbringen kann, zu ermitteln, sondern es müssen für eine Reihe von einzelnen Querschnitten die grössten Werthe gefunden werden, welche die Drehungsmomente der ausser ihnen wirkenden Kräfte annehmen können.

Zu diesem Behufe muss man die Spannweite des Trägers wieder längs einer horizontalen Linie im Seilpolygon der gegebenen Kräfte allmählig verschieben, für jede ihrer Lagen die Schlusslinie zeichnen und die Punkte anmerken, wo sie von den durch die mitverschobenen Querschnitte gezogenen Vertikalen getroffen wird. Diejenigen dieser Punkte, welche einem und demselben Querschnitte zugehören, bilden dann eine Curve, und der grösste in vertikaler Richtung gemessene Abstand zwischen dieser Curve und dem Seilpolygon gibt das grösste Moment, das in dem betreffenden Querschnitt stattfinden kann. Dieser Maximalabstand ist natürlich wieder nur in einer Vertikalen zu suchen, welche durch eine Polygonecke geht, woraus folgt, dass auch jetzt in jedem einzelnen Querschnitt das Maximalmoment nur dann statthat, wenn eine der concentrirten Kräfte über ihm steht. Der Querschnitt selbst liegt in der Vertikalen, in welcher jener grösste Abschnitt gefunden wurde, und daraus findet sich unmittelbar die Lage der Spannweite selbst in Bezug auf die concentrirten Kräfte.

Wir haben diese Aufgabe in Fig. 79, Taf. XVI für einen Träger $s s$ von 30 Meter Spannweite, über welchen ein Zug Engerth'scher Locomotiven von rechts nach links fährt, und für denjenigen Querschnitt q desselben durchgeführt, der 10 Meter von seinem linken Ende entfernt ist. Von der Lage $s_0 s_0$ ausgehend, wo der Vorderpuffer der ersten Locomotive über dem linken Ende des Trägers steht, gaben wir der Spannweite nach und nach die Lagen $s_1 s_1$, $s_2 s_2 \ldots$ bis $s_{10} s_{10}$ und dem gegebenen Querschnitt in ihr die Stellungen $q_1, q_2 \ldots$ bis q_{10}. Die durch letztere gezogenen Vertikalen schneiden die zugehörigen Schlusslinien in den Punkten q'_0, $q'_1 \ldots$ bis q'_{10}, welche die zu zeichnende Curve bilden; deren grösster Abstand vom Seilpolygon liegt auf der Vertikalen durch die Ecke VIII, und ist folglich das gesuchte Maximalmoment gleich $2{,}68^{cm} = 536$ Meter-Tonnen. Der gegebene Querschnitt muss dabei unter P_8 liegen, der Träger also die Stellung $s s$ gegen die Räder P_4 bis P_{16}, welche sich auf ihm befinden, einnehmen. Eine Parallele zur zugehörigen Schlusslinie $\sigma \sigma$ durch den Pol C des Kräftepolygons theilt die Gesammtbelastung 3 16 in die beiden Auflagerdrücke 3 T und T 16.

Weiter als bis zur Lage $s_{10} s_{10}$ brauchten wir für unseren obigen Zweck und unter den angenommenen Verhältnissen die Spannweite nicht zu verschieben, weil sich schon von der Lage $s_9 s_0$ an, wo der Vorderpuffer der zweiten Locomotive über dem linken Ende des Trägers steht, alle Umstände, wie sie bei den Stellungen $s_0 s_0$, $s_1 s_1$ u. s. w. stattfanden, genau wiederholen.

X. Abschnitt.

Höhere Momente und Trägheitsmoment paralleler Kräfte. — Trägheitsfläche und Centralfläche.

§. 111. Definition des statischen Momentes und der Momente höherer Ordnung. — Wir haben früher im §. 60 das Produkt aus einer Kraft P_1 in die senkrecht oder schief gemessene Entfernung x_1 ihres Angriffspunktes von einer Ebene E_x das Moment dieser Kraft in Bezug auf die Ebene genannt, und unter Gesammtmoment eines Systems paralleler Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ in Bezug auf eine Ebene E_x die Summe der Produkte aus ihnen in die Entfernungen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ihre Angriffspunkte von jener Ebene, also den Ausdruck

$$\Sigma P x$$

verstanden. Zum Unterschied von den sogleich zu definirenden neuen Momenten, werden wir jene in Zukunft statische Momente heissen. Denken wir uns nämlich wieder ein System paralleler Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ und Ebenen E_x, E_y, $E_z \ldots$, und bezeichnen wir die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte jener Kräfte von der Ebene E_x mit x_1, x_2, $x_3 \ldots$, ferner die wieder in irgend welcher Richtung gemessenen Entfernungen derselben Punkte von der Ebene E_y mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$ und ähnlich für die anderen Ebenen. Dann nennen wir das Produkt

$$P_1\, x_1^m\, y_1^n\, z_1^k \ldots,$$

wo m, n, k... beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen, ein höheres Moment der Kraft P_1 in Bezug auf jene Ebenen und die Produktensumme

$$P_1\, x_1^m\, y_1^n\, z_1^k \ldots + P_2\, x_2^m\, y_2^n\, z_2^k \ldots + P_3\, x_3^m\, y_3^n\, z_3^k \ldots + \ldots = \Sigma P\, x^m\, y^n\, z^k \ldots$$

ein höheres Moment des Systems paralleler Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$, und zwar von der $m + n + k \ldots^{ten}$ Ordnung.

§. 112. Construktion der höheren Momente im Allgemeinen. — Nachdem wir im §. 62 das statische Moment eines Systems paralleler Kräfte auf graphischem Wege finden gelernt haben, ist es leicht zu zeigen, wie jedes höhere Moment

$$\Sigma P\, x^m\, y^n\, z^k \ldots$$

eines solchen Kräftesystems durch Construktion zu erhalten ist. Beschäftigen wir uns zunächst mit der Ebene E_x allein, so wird das statische Moment $\Sigma P x$ des Kräftesystems erhalten, wenn man eine beliebige Projektionsebene E_x' annimmt und die Kräfte P parallel zur Durchschnittslinie M_x derselben mit der Momentenebene E_x stellt. Projicirt man dann diese Kräfte in einer zu E_x parallelen, sonst aber beliebigen Richtung auf die Projektionsebene E_x' und verbindet die parallelen Projektionen in letzterer Ebene durch ein Kräfte- und Seilpolygon, so schneiden die aufeinanderfolgenden Seiten des letzteren auf der Linie M_x Stücke ab, welche gleich den reducirten statischen

Momenten Px der Kräfte P der Grösse und dem Vorzeichen nach sind, und welche, aneinander gereiht, wie sie es in der Linie M_x bereits sind, das statische Moment ΣPx des Kräftesystems geben. Das letztere ist einfach gleich dem Abschnitt, den die äussersten Seilpolygonseiten auf der Linie M_x machen, und bezieht sich, sowie auch jene Einzelmomente, auf eine Basis H'_x, die wir im §. 62 näher bestimmt haben. Bezeichnen wir folglich jene Abschnitte der aufeinanderfolgenden Seilpolygonseiten auf der Linie M_x, oder die statischen Momente P_1x_1, $P_2x_2 \ldots$ der Kräfte P mit $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{X}'_2 \ldots$, so ist das statische Moment des Kräftesystems:

$$\Sigma Px = H'_x \Sigma \mathfrak{X}'.$$

Jene Abschnitte $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{X}'_2 \ldots$ denken wir uns nun als parallele Kräfte an den betreffenden Angriffspunkten der gegebenen Kräfte P wirken, wobei wir ihnen die Vorzeichen geben, die ihnen als Momente zukommen (s. §. 60). Wir verfahren dann mit diesen neuen Kräften ganz so, wie vorhin mit den gegebenen. Wir richten sie also parallel zur Linie M_x, projiciren sie auf die Ebene E'_x und zeichnen zu ihren Projektionen in letzterer Ebene das Kräfte- und Seilpolygon. Als ersteres kann sogleich die Aufeinanderfolge der Abschnitte in der Linie M_x genommen werden. Das für irgend einen Pol desselben zu zeichnende Seilpolygon ist zwischen denselben Parallellinien zu ziehen, wie das oben schon construirte. Die Abschnitte $\mathfrak{X}''_1$, $\mathfrak{X}''_2 \ldots$, welche aufeinanderfolgende Seiten desselben auf der Linie M_x machen, sind die statischen Momente jener Abschnitte $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{X}'_2 \ldots$ in Bezug auf die Ebene E_x, reducirt auf eine Basis, die in dem betreffenden Kräftepolygon auf bekannte Weise zu finden ist. Bezeichnen wir diese Basis mit H''_x, so folgt

$$\Sigma X'x = H''_x \Sigma \mathfrak{X}''.$$

Nun gibt jeder Abschnitt $\mathfrak{X}'$, multiplicirt mit der Basis H'_x, das statische Moment der betr. Kraft P in Bezug auf die Ebene E_x. Es ist folglich

$$\Sigma \mathfrak{X}'x = \Sigma \frac{Px}{H'_x} x = \frac{1}{H'_x} \Sigma Px^2 = H''_x \Sigma \mathfrak{X}''$$

und daraus

$$\Sigma Px^2 = H'_x H''_x \Sigma \mathfrak{X}''.$$

Indem wir so für die erste Momentenebene E_x fortfahren, finden wir offenbar

$$\Sigma Px^m = H'_x H''_x \ldots\ldots H^{(m)} \Sigma \mathfrak{X}^{(m)}.$$

Auf die zweite Momentenebene E_y übergehend, bringen wir wieder die Abschnitte $\mathfrak{X}^{(m)}$ als parallele Kräfte in den Angriffspunkten der betr. Kräfte P an, nehmen eine beliebige Projektionsebene E'_y und stellen jene Abschnitte parallel zu ihrer Durchschnittslinie M_y mit der Ebene E_y. In dieser Stellung projiciren wir sie nach irgend einer zur Ebene E_y parallelen Richtung auf E'_y und zeichnen in dieser letzteren Ebene das Kräfte- und Seilpolygon aus ihren Projektionen. Die Abschnitte der aufeinanderfolgenden Seiten des letzteren auf der Linie M_y, welche Abschnitte wir mit $\mathfrak{Y}'_1$, $\mathfrak{Y}'_2 \ldots$ bezeichnen wollen, sind die statischen Momente der Abschnitte $\mathfrak{X}^{(m)}$ bezüglich der Ebene E_y und reducirt auf eine in bekannter Weise zu erhaltende Basis, die mit H'_y bezeichnet sein möge. Es ist folglich

$$\Sigma \mathfrak{X}^{(m)} y = H'_y \Sigma \mathfrak{Y}',$$

oder, da jeder Abschnitt $\mathfrak{X}^{(m)}$, multiplicirt mit dem Produkt der vorhergehenden Momentenbasen, gleich Px^m ist,

$$\Sigma \mathfrak{X}^{(m)} y = \sum \frac{Px^m}{H'_x H''_x \ldots H^{(m)}_x} y = \frac{1}{H'_x H''_x \ldots H^{(m)}_x} \Sigma Px^m y$$

und daher

$$\Sigma Px^m y = H'_x H''_x \ldots H^{(m)}_x H'_y \Sigma \mathfrak{Y}'.$$

Indem man in dieser Weise für die Ebene E_y fortfährt, dann auf die Ebene E_z übergeht und betreffs dieser dieselbe Methode beibehält, findet man offenbar, vorausgesetzt, dass man sich auf jene drei Momentenebenen beschränkt,

$$\Sigma P x^m y^n z^k = H'_x H''_x \dots H^{(m)}_x H'_y H''_y \dots H^{(n)}_y H'_z H''_z \dots H^{(k)}_z \Sigma \mathfrak{Z}^{(k)}.$$

Das höhere Moment $\Sigma P x^m y^n z^k$ von der $m + n + k^{ten}$ Ordnung, stellt sich also als Produkt aus $m + n + k + 1$ Längengrössen dar. Davon ist eine, gleichviel welche, auf dem Kräftemassstab zu messen, die übrigen sind sämmtlich auf dem Längenmassstab abzugreifen. Das Vorzeichen der Momente ist so zu bestimmen, dass man demjenigen Abschnitt $\mathfrak{Z}^{(k)}$ die positive Richtung beilegt, der einer Kraft P angehört, deren Richtung als positiv angenommen wurde, und für welche das Produkt $x^m y^n z^k$ ein positives Vorzeichen erhält. Die Basen H sind dann durchweg als absolute Grössen aufzufassen.

§. 113. **Definition und Construktion der Trägheitsmomente.** — In den Anwendungen kommen ausschliesslich nur Momente zweiter Ordnung vor, und unter diesen wieder am häufigsten diejenigen, welche nur auf eine einzige Momenten-Ebene, E_x, bezogen sind und daher die Form $\Sigma P x^2$ haben. Wir nennen diese letzteren Trägheitsmomente in Bezug auf die Ebene E_x. Die Construktion derselben ist in der oben gegebenen allgemeinen Ausführung bereits enthalten; wir wollen sie jedoch, der Wichtigkeit der Sache halber, mit kurzen Worten wiederholen.

Nachdem man eine Projektionsebene E'_x angenommen und die gegebenen Kräfte P_1, $P_2 \dots$ parallel zu ihrer Durchschnittslinie M_x mit der Momentenebene gestellt hat, projicirt man die Kräfte parallel zu letzterer auf die Projektionsebene und zeichnet in dieser das Kräfte- und Seilpolygon aus den erhaltenen Projektionen. Die Abschnitte der aufeinanderfolgenden Seiten des letzteren mit der Linie M_x betrachtet man als neues Kräftepolygon, für das man einen Pol annimmt, und zu dem man dann zwischen denselben Parallellinien wie vorhin das Seilpolygon zeichnet. Die Abschnitte der aufeinanderfolgenden Seiten desselben mit der Linie M_x geben die Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Ebene E_x, und ihre algebraische Summe oder der Abschnitt zwischen den äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons ist das Trägheitsmoment des ganzen Kräftesystems in Bezug auf dieselbe Ebene. Diese Trägheitsmomente sind reducirt auf das Produkt zweier Momentenbasen, die in den beiden Kräftepolygonen auf die bekannte Weise aus der Lage des Pols zur Kräftelinie erhalten werden. In dem speziellen Fall, wo die Projektionsebene parallel zu der Richtung ist, in welcher die Entfernungen x der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen werden, sind jene Basen die in der Richtung der x gemessenen Entfernungen der Pole von der Kräftelinie in den betreffenden Kräftepolygonen.

Aus obiger Construktion geht, wie leicht zu sehen, hervor, dass der Sinn des Abschnittes, welcher das reducirte Trägheitsmoment einer Kraft der Grösse und dem Vorzeichen nach repräsentirt, von dem Sinne der Kraft abhängig ist, dagegen nicht geändert wird, wenn man dieselbe von einer Seite der Momentenebene auf die andere verlegt. Das Vorzeichen des Trägheitsmomentes einer Kraft kann also stets übereinstimmend mit dem der Kraft selbst gewählt werden, und dies ist auch von vornherein klar, denn das Produkt $P x^2$ ändert zwar sein Vorzeichen mit P, nicht aber mit der Entfernung x.

Wenn die sämmtlichen Angriffspunkte der Kräfte in einer und derselben Ebene gelegen sind, so bezieht man ihre Trägheitsmomente, ganz so wie früher (§. 63) die statischen, nicht mehr auf eine Ebene, sondern auf eine Axe M_x in der Ebene der Angriffspunkte, indem man sich letztere zugleich als Projektionsebene genommen denkt. Es braucht wohl nicht nochmal wiederholt zu

werden, welche Construktion in dieser Ebene vorzunehmen ist, um das Trägheitsmoment der Kräfte zu finden.

Werden die bei der Bestimmung der Trägheitsmomente vorkommenden Längen-Dimensionen (Entfernungen) in Metern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt, so erhält das Trägheitsmoment den Namen Quadratmeter-Kilogramm.

§. 114. Schwungradius eines Systems paralleler Kräfte. — Das Trägheitsmoment eines Systems paralleler Kräfte P_1, $P_2 \ldots$ in Bezug auf eine Momentenebene E, von welcher die Angriffspunkte die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen q_1, $q_2 \ldots$ haben, also der Ausdruck

$$\Sigma P q^2$$

ist nach Obigem ein Produkt aus drei Längengrössen, von denen eine auf dem Kräfte-, die beiden anderen auf dem Längenmassstab zu messen sind. Es kann daher auch als Produkt aus dem Quadrat einer Längengrösse k in die Summe der gegebenen Kräfte vorgestellt werden, wobei jene Längengrösse der Gleichung

$$\Sigma P q^2 = k^2 \Sigma P$$

genügen muss. Wir nennen k, analog mit einem ähnlichen Ausdruck der Dynamik bei den Trägheitsmomenten in Bezug auf Axen, den Schwungradius der Kräfte P. Dabei müssen wir sogleich ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass in dem allgemeinen Fall, wo wir von parallelen Kräften überhaupt sprechen, also verschiedenen Sinn derselben zulassen, das Vorzeichen von k^2 positiv oder negativ werden kann. Es ist positiv, wenn das Vorzeichen des Gesammt-Trägheitsmomentes $\Sigma P q^2$ mit dem der Summe der Kräfte, ΣP, übereinstimmt; negativ, wenn dies nicht der Fall ist. In letzterem Falle verstehen wir unter Schwungradius die Quadratwurzel aus dem absoluten Werth von $k^2 = \frac{\Sigma P q^2}{\Sigma P}$. Wenn das Kräftesystem blos parallele Kräfte von einerlei Sinn enthält, dann ist $\Sigma P q^2$ und ΣP, folglich auch k^2 allemal positiv.

Um das Trägheitsmoment des gegebenen Systems paralleler Kräfte zu finden, müssen nach dem vorigen §. in der Projektionsebene, welche am besten parallel zur Richtung der q angenommen wird, zwei Kräfte- und Seilpolygone gezeichnet werden. Nennt man, unter Voraussetzung obiger Lage der Projektionsebene, H und H' die in der Richtung der q gemessenen Entfernungen der Pole in den Kräftepolygonen von den Kräftelinien derselben, bezeichnet man ferner die Abschnitte der aufeinanderfolgenden Seiten der Seilpolygone auf der Schnittlinie der Projektions- und Momentenebene mit P'_1, $P'_2 \ldots$ und bezw. mit P''_1, $P''_2 \ldots$, dann ist

$$\Sigma P q^2 = H H' \, \Sigma P'',$$

und wir können daher den Schwungradius aus der Gleichung finden

$$H H' \, \Sigma P'' = k^2 \, \Sigma P,$$

woraus:

$$k = \sqrt{\frac{H H' \Sigma P''}{\Sigma P}}.$$

Dieser Ausdruck, in dem wir den Radikanden stets nur seinem absoluten Werth nach nehmen, ist leicht zu construiren. Sei z. B. 0nC (Fig. 80a), Taf. XVII) das erste jener Kräftepolygone, 0n die Kräftelinie, welche die Kräfte P enthält, C der Pol, CT die in der Richtung q gemessene Basis H. Macht man 0b gleich der zweiten Basis H' und zieht bc parallel zu nC, ct parallel zu CT, so ist

$$ct = h = \frac{HH'}{\Sigma P},$$

wodurch

$$k = \sqrt{h\ \Sigma P''}$$

wird. Bedeutet also in Fig. 80b) $m_0''m_n''$ den Abschnitt, welchen die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Durchschnittslinie der Momenten- und Projektionsebene machen, d. h. ist $m_0''m_n'' = \Sigma P''$, so erhält man k, wenn man $m_0''m_n''$ um $m_n''L = h$ verlängert, über der Summe beider als über einem Durchmesser einen Halbkreis beschreibt und in ihrem Zusammenstossungspunkt eine Senkrechte $m_n''K$ auf dem Durchmesser errichtet, bis sie die Peripherie des Halbkreises in K durchschneidet. Diese Senkrechte $m_n''K$ ist der gesuchte Schwungradius k.

Im Allgemeinen können die Basen H und H' willkürlich angenommen werden. Steht in einem speziellen Fall kein Hinderniss entgegen, so ist es für die Bestimmung des Schwungradius vortheilhaft, die Länge der ersten (oder auch der zweiten) Basis H gleich der von ΣP anzunehmen. Dann wird

$$k = \sqrt{H'\ \Sigma P''}.$$

Man hat folglich in Fig. 80b) $m_0''\ m_n''$ einfach um die zweite Basis H' zu verlängern und dann ganz so zu verfahren wie oben, um k zu erhalten.

§. 115. Trägheitsfläche eines Systems paralleler Kräfte; das Trägheits-Ellipsoid und die Trägheits-Hyperboloide. — Denkt man sich zu beiden Seiten der Momentenebene E eines Systems paralleler Kräfte P zwei zu ihr parallele Ebenen E' und E'' in Entfernungen $+k$ und $-k$, welche gleich dem Schwungradius sind, geführt, wobei diese Entfernungen in derselben Richtung gemessen werden, wie diejenigen q der Angriffspunkte der Kräfte von der Momentenebene, dann ist zunächst leicht zu zeigen, dass die Stellung dieser Ebenen zur Momentenebene von der Richtung, in welcher die q und k gemessen werden, ganz unabhängig ist. Denn ändert sich die Richtung der q, so ändern sich die Grössen derselben in einem und demselben bestimmten Verhältniss. In dem nämlichen Verhältniss muss sich also, da die Kräfte selbst die gleichen bleiben, der Gleichung

$$\Sigma Pq^2 = k^2 \Sigma P$$

zufolge, der Schwungradius k ändern. Trägt man nun denselben wieder in der neuen Richtung der q zu beiden Seiten der Momentenebene auf, so erhält man die nämlichen beiden Ebenen E' und E''. Diese sind also lediglich von den Kräften P und der gegenseitigen Lage ihrer Angriffspunkte unter sich und zur Ebene E abhängig; und es existiren bei einem gegebenen Kräftesystem für jede Momentenebene E zwei völlig bestimmte Ebenen E' und E''. Diese letzteren haben aber eine höchst merkwürdige Eigenschaft. Denkt man sich nämlich, die Momentenebene drehe sich um einen beliebigen Punkt O, und stellt man sich zu jeder ihrer Stellungen die zugehörigen Ebenen E' und E'' vor, so berühren (umhüllen) diese letzteren eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt, der mit jenem festen Punkte O zusammenfällt.

Um dies zu beweisen, legen wir ein beliebiges, recht- oder schiefwinkeliges Coordinatensystem XYZ zu Grunde, dessen Anfangspunkt mit dem Punkte O, um welchen sich die Momentenebene dreht, zusammenfällt. Wir bezeichnen die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2 ... in diesem System mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2.... Von jedem dieser Angriffspunkte A denken wir uns eine Linie AB parallel zur Z Axe auf die XY Ebene gezogen und durch den Fusspunkt B in letzterer Ebene eine Parallele BC zur Y Axe, bis sie die X Axe im Punkte C schneidet. Dann sind in dem Linienzug OCBA die Stücke $OC = x$, $CB = y$ und $BA = z$. Wir legen nun durch den Punkt O eine beliebige Momenten-Ebene E und projiciren parallel zu

ihr für jeden der Angriffspunkte den Linienzug OCBA auf die Linie q, welche die Entfernung des Angriffspunktes von der Momentenebene misst. Dann ist offenbar q selbst die Projektion jenes Linienzuges.

Bezeichnen wir nun mit α, β, γ die Verhältnisszahlen, mit welchen Strecken, die bezw. in der Richtung der X, Y oder Z Axe liegen, multiplicirt werden müssen, um ihre Projektionen parallel zur Ebene E auf eine Linie in der Richtung der q zu erhalten, so ist offenbar

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

für jeden Angriffspunkt, und daher

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

oder, da für ein und die nämliche Ebene E und Richtung q die α, β, γ constante Grössen sind,

$$\Sigma P q^2 = \alpha^2\, \Sigma P x^2 + \beta^2\, \Sigma P y^2 + \gamma^2\, \Sigma P z^2 + 2\beta\gamma\, \Sigma P y z + 2\alpha\gamma\, \Sigma P x z + 2\alpha\beta \Sigma P x y.$$

In diesem Ausdruck werden sich nun mit der Stellung der Ebene E und der Richtung der q wohl α, β, γ, nicht aber die Ausdrücke $\Sigma P x^2$, $\Sigma P y^2$ u. s. w. ändern. Diese sind nichts anderes als die Momente zweiter Ordnung des gegebenen Kräftesystems für die Coordinatenebenen, die Entfernungen der Angriffspunkte stets in der Richtung der betr. Coordinatenaxen gemessen. Sie sind bestimmt, sobald das Kräftesystem gegeben und das Coordinatensystem angenommen ist. Setzen wir

$$\Sigma P x^2 = a^2 \Sigma P; \quad \Sigma P y^2 = b^2 \Sigma P; \quad \Sigma P z^2 = c^2 \Sigma P; \quad \Sigma P y z = d^2 \Sigma P; \quad \Sigma P x z = e^2 \Sigma P;$$
$$\Sigma P x y = f^2 \Sigma P,$$

so sind a, b, c die Schwungradien der Trägheitsmomente bezüglich der drei Coordinatenebenen, und die obige Gleichung geht über in

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P \left[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2 + 2\beta\gamma d^2 + 2\alpha\gamma e^2 + 2\alpha\beta f^2\right].$$

Denken wir uns für die angenommene Stellung der Momentenebene E den Schwungradius k gefunden und die Ebenen E′ und E″ in den in der Richtung der q gemessenen Entfernungen $+k$ und $-k$ von der Ebene E parallel zu dieser gestellt, bezeichnen wir ferner die Abschnitte, welche diese Ebenen auf den Coordinatenaxen machen, mit $\pm \mathfrak{x}$, $\pm \mathfrak{y}$, $\pm \mathfrak{z}$, und projiciren wir diese Abschnitte parallel zur Ebene E auf die Richtungen der k oder q, so ergeben sich die Relationen

$$k = \alpha \mathfrak{x} = \beta \mathfrak{y} = \gamma \mathfrak{z},$$

woraus

$$\alpha = \frac{k}{\mathfrak{x}}; \quad \beta = \frac{k}{\mathfrak{y}}; \quad \gamma = \frac{k}{\mathfrak{z}}.$$

Dies in die oben erhaltene Gleichung eingesetzt, gibt

$$\Sigma P q^2 = k^2 \Sigma P \left[\frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\right],$$

worin k^2 eine wesentlich positive Grösse ist. Setzen wir in dem Ausdruck links vom Gleichheitszeichen den ihm gleichen $k^2 \Sigma P$, so müssen wir uns erinnern, dass in dem allgemeinen Fall, wo es sich um parallele Kräfte mit verschiedenem Sinn handelt, das Quadrat des Schwungradius in dem zuletzt angeführten Ausdruck sowohl positiv als negativ werden kann. Um das anzudeuten, schreiben wir

$$k^2\, \Sigma P \left[\frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\right] = \pm\, k^2\, \Sigma P,$$

woraus folgt:

$$\varphi)\qquad \frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \pm 1$$

Verändert man nun die Stellung der Momentenebene E so, dass sie stets durch den Punkt O geht, und denkt man sich für jede dieser Stellungen die Ebenen E' und E'' und ihre Abschnitte $\pm \mathfrak{x}$, $\pm \mathfrak{y}$, $\pm \mathfrak{z}$ auf den Coordinatenaxen, so ist obige Gleichung diejenige einer Fläche, welche die Ebenen E' und E'' umhüllen, ausgedrückt in Ebenen-Coordinaten. Sie ist eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt, dem Anfangspunkt O des Coordinatensystems, um den sich die Momentenebene dreht. Kennt man sie für ein gegebenes Kräftesystem, so ist das Trägheitsmoment desselben für jede durch ihren Mittelpunkt gehende Momenten-Ebene E leicht zu erhalten. Man darf nur parallel zu E zwei Tangential-Ebenen an die Fläche legen, und deren (gleiche) Entfernung von E in der Richtung messen, in welcher die Entfernungen q der Angriffspunkte von derselben Ebene genommen werden. Diese Entfernung ist der Schwungradius des Trägheitsmomentes, letzteres selbst also gleich dem Quadrat desselben multiplicirt mit der algebraischen Summe der Kräfte.

Man nennt desshalb die unter der Gleichung φ) vorgestellte Fläche **Trägheitsfläche**. Um sie näher kennen zu lernen, beziehen wir sie auf ein Coordinatensystem, dessen Axen mit drei conjugirten Durchmessern der Fläche zusammenfallen. Obige Gleichung bekommt dann die Form:

$$\psi)\qquad \frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1,$$

wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die neuen Ebenen-Coordinaten und A, B, C die conjugirten Halbaxen der Fläche, die beziehungsweise in die Coordinatenaxen OX, OY, OZ fallen, bezeichnen. A, B, C sind also die in der Richtung der betreffenden Coordinatenaxen gemessenen Schwungradien des Kräftesystems für die Coordinatenebenen YZ, XZ und bezw. XY, und folglich

$$A^2 = \frac{\Sigma PX^2}{\Sigma P},\quad B^2 = \frac{\Sigma PY^2}{\Sigma P},\quad C^2 = \frac{\Sigma PZ^2}{\Sigma P},$$

wo X, Y, Z die Punkt-Coordinaten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte bezeichnen.

Wenn nun sämmtliche Kräfte des gegebenen Systems einerlei Sinn haben, so ist k^2, das Quadrat des Schwungradius, für jede Stellung der Momentenebene positiv; im Gleichen sind A^2, B^2, C^2 positive Grössen, die Gleichung ψ) geht folglich in die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = 1$$

über, die Trägheitsfläche wird ein Ellipsoid, das **Trägheits-Ellipsoid**.

Enthält aber das Kräftesystem Kräfte von verschiedenem Sinn, so wird es Stellungen der Momentenebene geben können, wo k^2 positiv, und andere, wo k^2 negativ wird; es ist dann in der Gleichung ψ) rechts vom Gleichheitszeichen das Doppelzeichen beizubehalten, und wir bekommen als Trägheitsfläche eine Doppelfläche. In diesem Falle wird dann stets entweder eines oder zwei von den Quadraten A^2, B^2, C^2 negativ werden. Im ersten Falle erhalten wir die Doppelfläche

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} - \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1,$$

im zweiten Falle die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}} - \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} - \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1.$$

Beidesmal besteht die Doppelfläche aus zwei zusammengehörigen Hyperboloiden, einem einmanteligen und einem zweimanteligen, mit gleichem Mittelpunkt, gleichen conjugirten Halbaxen und einem gemeinschaftlichen Asymptoten-Kegel.

Umgekehrt, findet sich bei der sogleich zu lehrenden Construktion der Trägheitsfläche, dass nicht alle drei Quadrate A^2, B^2, C^2 der Schwungradien für die drei conjugirten Coordinaten-Ebenen positiv sind, sondern einer oder zwei negativ, so hat man in der Gleichung ψ) sofort das Doppelzeichen ± 1 zu setzen und erhält als Trägheitsfläche eine, aus einem einmanteligen und einem zweimanteligen Hyperboloid bestehende Doppelfläche. Für jede Stellung der Momentenebene, die stets durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt jener Flächen hindurch geht, erhält man ein Paar gleichweit von ihr entfernter Tangentialebenen E' und E'' entweder nur am einmanteligen, oder nur am zweimanteligen Hyperboloid. Ihre Entfernung von der Momentenebene, gemessen in der Richtung der q, ist der Schwungradius k des Kräftesystems für jene Ebene. Dessen Quadrat ist positiv, wenn die Tangentialebenen E' und E'' das eine von den beiden Hyperboloiden berühren, negativ, wenn das andere berührt wird. In dem Falle, wo das Quadrat einer einzigen der conjugirten Halbaxen negativ wird, liefert das einmantelige Hyperboloid positive, das zweimantelige negative k^2; das Gegentheil aber findet statt, wenn die Quadrate zweier conjugirter Halbaxen negativ werden.

Wenn die Momentenebene den gemeinschaftlichen Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide berührt, werden die Tangentialebenen E' und E'' Asymptotenebenen und fallen mit der Ebene E zusammen. Der Schwungradius k und somit das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems ist für solche Lagen der Momentenebene Null.

§. 116. **Trägheits-Curve, Trägheits-Ellipse und Trägheits-Hyperbeln.** — Wenn die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte des gegebenen Systems in einer und der nämlichen Ebene liegen, so tritt an die Stelle der Momentenebene E eine Momentenaxe M in jener Ebene. In Bezug auf dieselbe hat der Schwungradius k dieselbe Bedeutung wie oben, er hat nämlich der Bedingung zu genügen

$$\Sigma P_i q^2 = k^2 \Sigma P.$$

Werden zu beiden Seiten der Axe M zwei Parallele M' und M'' in der nach der Richtung der q gemessenen Entfernung k gezogen, und dreht man die Axe M um einen beliebigen Punkt O in ihr, so tangiren (umhüllen) die zugehörigen Linien M' und M'' eine Curve zweiten Grades, deren Gleichung in Linien-Coordinaten für ein beliebiges System, dessen Anfangspunkt O ist,

$$\varphi') \qquad \frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \pm 1$$

wird. Die Curve hat also einen Mittelpunkt, den Punkt O. Kennt man sie, so erhält man das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems für irgend eine durch ihren Mittelpunkt gehende Momentenaxe, wenn man parallel zu dieser zwei Tangenten an die Curve zieht. Die beiderseits gleiche, in der Richtung der q gemessene Entfernung derselben von M ist der Schwungradius k des Trägheitsmomentes. Desshalb heisst man jene Curve Trägheits-Curve.

Bezieht man sie auf ein Paar ihrer conjugirten Durchmesser, so wird ihre Gleichung in Linien-Coordinaten

$$\psi') \qquad \frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \pm 1,$$

wo $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, A und B ganz ähnliche Bedeutungen wie oben haben.

Sind sämmtliche Kräfte des gegebenen Systems in gleichem Sinn gerichtet, so wird für jede Stellung der Momentenaxe k^2 positiv, folglich werden auch A^2 und B^2 positiv und die Gleichung ψ') geht über in die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = 1,$$

welche einer Ellipse angehört, der Trägheits-Ellipse.

Gibt es aber Stellungen der Axe M, für welche k^2 negativ wird, so wird immer eines der Quadrate der Halbaxen, A^2 oder B^2, auch negativ, und wir erhalten als Trägheits-Curve diejenige Doppelcurve, deren Gleichung

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} - \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \pm 1$$

oder

$$-\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \mp 1$$

ist. Beide Fälle fallen in einen zusammen; die Doppelcurve besteht immer aus zwei Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt, gleichen (nur vertauschten) Halbaxen und gemeinschaftlichen Asymptoten. Für jede durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gelegte Momentenaxe M erhält man ein Paar zu ihr parallele Tangenten M' und M'' entweder an der einen, oder an der anderen Hyperbel. Das entsprechende k^2 ist positiv für die Berührung an der einen, negativ für die Berührung der anderen Hyperbel. Wird bei der sogleich zu lehrenden Construktion der Doppelcurve das Quadrat derjenigen Halbaxe B, die auf der Y Axe liegt, negativ, so liefert diejenige Hyperbel, deren imaginäre Axe in der Y Axe liegt, positive k^2, die andere negative, und umgekehrt in dem andern Fall. Wenn die Momentenaxe M mit einer der beiden gemeinschaftlichen Asymptoten zusammenfällt, so wird der Schwungradius und somit das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems in Bezug auf sie Null.

§. 117. Construktion der Trägheitsfläche im Allgemeinen. — Die Trägheitsfläche eines gegebenen Systems paralleler Kräfte für einen gegebenen Punkt O als Mittelpunkt ist bestimmt durch irgend drei conjugirte Durchmesser. Wir werden sogleich einen Satz kennen lernen, mittelst dessen die Richtungen von drei solchen Durchmessern gefunden werden können. Sind diese bekannt, so hat die Aufsuchung der Längen der Halbdurchmesser keine Schwierigkeit mehr. Jeder ist der Schwungradius des Trägheitsmoments des gegebenen Kräftesystems für die ihm conjugirte Ebene, welche durch die beiden anderen hindurchgeht, und für Entfernungen, die parallel zu ihm gemessen werden.

Der oben erwähnte Satz lautet: Wenn man die statischen Momente der Kräfte eines gegebenen Parallel-Kräftesystems in Bezug auf irgend eine Momentenebene aufsucht, sie als Parallelkräfte in den gegebenen Angriffspunkten anbringt und den Mittelpunkt dieser letzteren bestimmt, so ist jede Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit einem Punkt O der Momentenebene dieser letzteren in derjenigen Trägheitsfläche des Kräftesystems conjugirt, deren geometrischer Mittelpunkt der Punkt O ist.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Bevor wir ihn jedoch antreten, wollen wir bemerken, dass wir in Zukunft den Mittelpunkt paralleler Kräfte, um Verwechslungen mit geometrischen Mittelpunkten zu vermeiden, Schwerpunkt dieser Kräfte nennen wollen, ohne also damit vorauszusetzen, dass blos von Schwerkräften die Rede sei. Bezeichnen wir die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte des gegebenen Kräftesystems von der Mo-

mentenebene E mit z, so sind die statischen Momente Pz der Kräfte ihrer absoluten Grösse nach zwar abhängig von der Richtung, in welcher die Entfernungen z gemessen werden, aber ihr gegenseitiges Verhältniss bleibt dasselbe für alle Richtungen der z. Wenn sie also, nachdem sie für irgend eine Richtung gefunden sind, an den Angriffspunkten als Parallelkräfte wirkend gedacht werden, so bleibt ihr Schwerpunkt immer der nämliche, wie auch später die Richtung der z abgeändert werden möge. Für jede Ebene, welche durch jenen Schwerpunkt hindurchgeht, ist das statische Moment der als Kräfte gedachten statischen Momente Null. Denkt man sich folglich in der Momentenebene E einen Punkt O als Anfangspunkt eines Coordinatensystem OXYZ genommen, dessen beide Axen OX und OY beliebig in der Ebene E liegen, und dessen Axe OZ die Verbindungslinie seines Anfangspunktes mit dem oben gefundenen Schwerpunkt ist, so gehen die beiden Coordinaten-Ebenen XZ und YZ durch jenen Schwerpunkt und die statischen Momente der als Kräfte gedachten und auf die Ebene E bezogenen statischen Momente der gegebenen Kräfte sind folglich für jene Coordinatenebenen gleich Null. Sie sind aber, vorausgesetzt, dass jetzt die Entfernungen der Angriffspunkte von den Coordinatenebenen in der Richtung der Axen gemessen werden, nichts anderes als die Trägheitsmomente zweiter Ordnung $\Sigma P x z$ und $\Sigma P y z$; und wenn diese Null sind, so folgt aus der allgemeinen Gleichung φ) der Trägheitsfläche (S. 122), dass die Z Axe der XY Ebene in der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt O conjugirt ist. Dies ist der zu beweisende Satz.

Um mittelst desselben drei conjugirte Durchmesser der Trägheitsfläche eines gegebenen Kräftesystems für einen Punkt O als Mittelpunkt zu finden, legt man durch letzteren Punkt eine beliebige Ebene E und sucht die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf diese Ebene in der bekannten Weise, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in irgend einer beliebigen Richtung gemessen werden können. Diese statischen Momente, oder auch nur die Abschnitte, welche zwischen den Seiten des zu construirenden Seilpolygons liegen, denkt man sich als Parallelkräfte an den gegebenen Angriffspunkten wirken und sucht nach der im §. 58 gezeigten Methode ihren Schwerpunkt. Dessen Verbindungslinie mit dem Punkt O ist der Ebene E in der zu suchenden Trägheitsfläche conjugirt und wird als einer der zu suchenden conjugirten Durchmesser OZ genommen. Ein zweiter, OX, kann in der Ebene E beliebig angenommen werden. Der dritte, OY, wird dann für die Ebene OXZ als Momentenebene auf demselben Wege gefunden, wie der erste, OZ, für die Ebene E. Da er, ebenso wie OX, in der letzteren ursprünglich angenommenen Ebene liegen muss, so muss auch der Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente, die in Bezug auf die Ebene OXZ genommen werden, in der Ebene E liegen, und es genügt daher, den Schwerpunkt der Projektionen jener Momente auf der Ebene E aufzusuchen, wozu es nur zweier Kräfte- und zugehörigen Seilpolygone bedarf. Wie dann, nachdem die Richtungen dreier conjugirten Durchmesser gefunden sind, die Längen derselben, bezw. der Halbdurchmesser erhalten werden können, wurde bereits oben erörtert.

§. 118. Construktion der Trägheits-Curve im Allgemeinen. — Für Kräfte, deren Angriffspunkte sämmtlich in einer Ebene liegen, geht der oben erwiesene Satz, wie leicht zu sehen, in folgenden über: Wenn man für irgend eine Axe M in der Ebene der Angriffspunkte die statischen Momente der Kräfte sucht, sie als parallele Kräfte an den Angriffspunkten jener wirken denkt und ihren Mittelpunkt construirt, so ist die Verbingungslinie dieses Punktes mit irgend einem Punkte O der Axe M dieser letzteren in derjenigen Trägheitscurve des gegebenen Kräftesystems conjugirt, deren Mittelpunkt jener Punkt O ist.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz ähnlich zu führen, wie der für den allgemeinen Satz

im vorigen §., und es lässt sich unmittelbar daraus, ebenfalls ganz so wie dort, das Verfahren entnehmen, wie man für ein gegebenes Kräftesystem, dessen Angriffspunkte in einer und derselben Ebene liegen, ein Paar conjugirter Durchmesser der Trägheitscurve findet, deren Mittelpunkt O gegeben ist.

§. 119 Erstes Beispiel: Construktion des Trägkeits-Ellipsoids für vier gleichgerichtete parallele Kräfte. — Beispielshalber lösen wir in Fig. 81, Taf. XVII die Aufgabe, das Trägheits-Ellipsoid für vier gleichgerichtete parallele Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ zu finden, wenn der Mittelpunkt O desselben gegeben ist. Zu diesem Behufe legen wir durch den Punkt O die beiden, aufeinander senkrecht stehenden Tafeln eines Risssystems, also die Axe XX desselben. Die Risse der Angriffspunkte in jenen Tafeln seien $A_1', A_2' \ldots A_4'$ und $A_1'', A_2'' \ldots A_4''$. Die Kräfte selbst wurden sogleich zu dem Kräftepolygon 0 1 2 3 4 in der Axe XX aneinander getragen. Als Momentenebene, welche beliebig durch den Punkt O gelegt werden darf, nehmen wir die erste Tafel und suchen den dieser Tafel conjugirten Durchmesser in dem Trägheitsellipsoid, dessen Mittelpunkt O ist.

Zu diesem Zwecke construiren wir die statischen Momente der gegebenen Kräfte für die erste Tafel, indem wir die zweite Tafel als Projektionsebene annehmen und die Kräfte parallel zu XX stellen. Ihre Angriffspunkte projiciren wir in orthogonaler Richtung auf die zweite Tafel, so dass $A_1'', A_2'' \ldots A_4''$ selbst sogleich die gesuchten Projektionen sind. In diesen denken wir uns die Kräfte parallel zur Axe XX wirken und zeichnen zu dem Kräftepolygon C 0 1 2 3 4, dessen Pol C beliebig angenommen werden kann, das Seilgolygon 0 I II ... V. Die aufeinanderfolgenden Seiten desselben treffen die Schnittlinie XX der Projektions- und Momentenebene in den Punkten 0, 1', 2', 3', 4'. Die Abschnitte 0 1', 1'2', ... 3'4' müssen dann als Kräfte in den Punkten $A_1, A_2 \ldots A_4$ wirken gedacht und ihr Schwerpunkt gesucht werden. Dies geschah durch Construktion der beiden Seilpolygone 0 I II' .... V' und 0'' I II'' ... V'' in der zweiten Tafel und des Seilpolygons 0''' I''' ... V''' in der ersten Tafel auf die bekannte Weise. Das erste und dritte dieser Seilpolygone gehören beide zum Kräftepolygon C 0 1' 2' ... 4', das man sich einmal in der ersten, dann in der zweiten Tafel liegend dachte. Die Seiten des zweiten Seilpolygons stehen auf den entsprechenden des ersten senkrecht; es gehört zu dem in der zweiten Tafel liegenden Kräftepolygon, das durch Verdrehung des Polygons C 0 1' 2' ... 4' um 90 Grad erhalten wird, aber nicht gezeichnet zu werden brauchte. Die Projektionen des so gefundenen Schwerpunkts wurden mit S', S'' bezeichnet. Seine Verbindungslinie mit O, deren Projektionen mit OZ' und OZ'' bezeichnet wurden, gibt den zur ersten Tafel conjugirten Durchmesser des Trägheits-Ellipsoids der Richtung nnd Lage nach.

Nachdem man dann XX als den zweiten conjugirten Durchmesser, der in der ersten Tafel willkürlich gewählt werden darf, angenommen hat, muss noch der dritte Durchmesser gesucht werden, derjenige, welcher der Ebene conjugirt ist, die durch OX und OZ hindurch geht. Zu dem Ende nehmen wir die erste Tafel als Projektionsebene, welche die Momentenebene XZ ebenfalls in der Axe XX schneidet. Dann muss man sich die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ wieder parallel zu XX an ihren Angriffspunkten wirken denken und letztere parallel zur Ebene XZ auf die erste Tafel projiciren. Wir wählen als Richtung der Projektionsstrahlen diejenige, welche zugleich auf XX senkrecht steht und erhalten demnach auf bekannte Weise $A_1''', A_2''' \ldots A_4'''$ als Projektionen der Angriffspunkte. In ihnen hat man sich die Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ parallel zu XX wirkend zu denken und ihre statischen Momente in Bezug auf XX zu suchen. Das geschah durch Construktion des Seilpolygons 0^4 I^4 $II^4 \ldots V^4$, das zum Kräftepolygon C 0 1 2 ... 4 gehört, und dessen aufeinanderfolgende Seiten die Abschnitte 01'', 1''2'' ... 3''4'' auf XX geben, welche die statischen Momente der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ bezüglich der Ebene XZ repräsentiren. Diese stati-

schen Momente mussten nun als Kräfte in den Punkten $A_1', A_2 \ldots A_4$ wirken gedacht und ihr Mittelpunkt gesucht werden. Da man weiss, dass der gesuchte conjugirte Durchmesser in der ersten Tafel liegen muss, also auch jener Mittelpunkt, so genügt es, den Mittelpunkt der Kräfte $0\,1''$, $1''2'' \ldots$ für den Fall zu finden, dass sie an den Projektionen $A_1', A_2' \ldots A_4'$ oder an denen $A_1''', A_2''' \ldots A_4'''$ der Angriffspunkte auf der ersten Tafel wirken. Die beiden Seilpolygone $0^4\ I^4\ II^5 \ldots V^5$ und $0^6\ I^4\ II^6 \ldots V^6$, deren Seiten aufeinander senkrecht stehen, und welche beide aus dem Kräftepolygon $C\ 0\ 1''\ 2'' \ldots 4''$ construirt wurden, ergeben S_1' als den gesuchten Mittelpunkt. Seine Verbindungslinie mit O ist der in der ersten Tafel liegende dritte conjugirte Durchmesser OY des Trägheits-Ellipsoids.

Um die Länge der drei in OX, OY, OZ liegenden conjugirten Halbdurchmesser zu finden, muss man die Schwungradien des Kräftsystems für die Ebenen YZ, XZ, XY suchen, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in den Richtungen OX, OY, OZ zu messen sind. Bezüglich der Ebene XY oder der ersten Tafel wurden schon oben die Abschnitte $0\,1', 1'\,2' \ldots$ als statische Momente der Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ erhalten, vorausgesetzt, dass die Entfernungen senkrecht zur ersten Tafel gemessen wurden; C0 war die zugehörige Basis. Ferner ist unter denselben Vorausetzungen der auf XX liegende Abschnitt 0z zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons $0\ I\ II' \ldots V'$ das Gesammt-Trägheitsmoment des Kräftesystems. Da aber die Entfernungen der Angriffspunkte nicht senkrecht zur ersten Tafel, sondern in der Richtung OZ gemessen werden sollen, so darf beidesmal nicht C0 als Basis genommen werden, sondern eine Linie H_z, welche von C nach XX gezogen wurde und den nämlichen Winkel mit C0 bildet, wie jene beiden Richtungen miteinander. Das Gesammt-Trägheitsmoment in Bezug auf die erste Tafel für die Richtung OZ ist also $H_z^2 \times \overline{0z}$. Der Schwungradius wird folglich $\sqrt{\frac{H_z^2 \times \overline{0z}}{\Sigma P}}$ und ist leicht zu construiren. Ueber $\Sigma P = 0\,4$ zieht man einen Halbkreis und trägt vom einen Endpunkte 4 des Durchmessers die Basis H_z als Sehne ein; an den anliegenden Abschnitt, gleich $\frac{H_z^2}{\Sigma P}$, wird 0z gefügt, über der Summe beider ein zweiter Halbkreis beschrieben und im Zusammenfügungspunkt eine Senkrechte auf dem Durchmesser bis zur Peripherie hin errichtet. Diese Senkrechte ist der gesuchte Schwungradius und darf nur noch von O aus auf OZ aufgetragen werden, um den Endpunkt c des in OZ liegenden Halbdurchmessers zu erhalten.

In ganz gleicher Weise sind in Bezug auf die XZ Ebene die bereits oben erhaltenen Abschnitte $0\,1'', 1''\,2'' \ldots$ des Seilpolygons $0^4\ I^4 \ldots V^4$ die statischen Momente, und der Abschnitt 0y, zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons $0^4\ I^4\ II^5 \ldots V^5$ ist das gesammte Trägheitsmoment der gegebenen Kräfte, alle reducirt auf die Basis C0 und genommen für die in der ersten Tafel liegende Richtung C0, nach der die Entfernungen gemessen werden. Da letztere aber in der Richtung OY zu nehmen sind, so muss anstatt C0 die Linie H_y als Basis genommen werden, die mit C_0 denselben Winkel bildet, als OY und von C bis zur Axe XX reicht. So erhält man $H_y^2 \times \overline{0y}$ als Trägheitsmoment des Kräftesystems bezüglich der Ebene XZ und für die Richtung OY, und der Schwungradius ist folglich $\sqrt{\frac{H_y^2 \times \overline{0y}}{\Sigma P}}$. Derselbe wurde ganz ähnlich wie der andere vorhin construirt und als Ob' auf OY' aufgetragen.

Endlich ist noch das Gesammt-Trägheitsmoment bezüglich der Ebene YZ für die Richtung OX zu finden. Wir nehmen zu dem Zwecke wieder die erste Tafel als Projektionsebene, so

dass OY' der Schnitt derselben mit der Momentenebene wird und projiciren die Angriffspunkte parallel zur YZ Ebene in einer zu OY' senkrechten Richtung auf die erste Tafel. Die so erhaltenen Projektionen wurden mit A_1^{IV}, $A_2^{IV} \ldots A_4^{IV}$ bezeichnet. In ihnen hat man sich die Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_4$ parallel zu OY' wirken zu denken und muss nun zunächst ihre statischen Momente suchen. Dies geschah mittelst des Kräftepolygons $C_1 O\ 1_1\ 2_1 \ldots 4_1$, das dem $C\ 0\ 1 \ldots 4$ genau gleich ist, und mittelst des zugehörigen Seilpolygons $O\ I^7\ II^7 \ldots V^7$, dessen aufeinanderfolgende Seiten auf OY die Abschnitte $O\,1'''$, $1'''\ 2''' \ldots 3'''\ 4'''$ machen. Zu dem durch letztere bestimmten Kräftepolygon $C\ O\ 1'''\ 2''' \ldots 4'''$ wurde endlich noch das Seilpolygon $O\ I^7\ II^8 \ldots V^8$ construirt, dessen äusserste Seiten auf OY' das Gesammt-Trägheitsmoment Ox abschneiden. Beide, die statischen und die Trägheitsmomente, beziehen sich dabei wieder auf die Basis C_1O, wobei die Entfernungen nach der in der ersten Tafel gelegenen Richtung C_1O zu messen sind. Da sie aber in der Richtung OX gemessen werden sollen, so muss man H_x als Basis nehmen, das parallel zu OX von C_1 an nach der Axe OY' gezogen wurde. Damit erhält man $H_x^2 \times \overline{Ox}$ als Gesammt-Trägheitsmoment besüglich der Ebene YZ für die Richtung OX und folglich $\sqrt{\frac{H_x^2 \times \overline{Ox}}{\Sigma P}}$ als Schwungradius, der ganz so wie oben construirt werden kann. Auf OX als Oa aufgetragen gibt er den dritten Halbdurchmesser.

§. 120. **Zweites Beispiel: Construktion der Trägheitscurve für vier parallele Kräfte in einer Ebene.** — In Fig. 82, Tafel XVIII haben wir für den gegebenen Mittelpunkt O die Trägheits-Curve eines Systems von vier parallelen, in verschiedenem Sinne gerichteten Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_4$ gesucht, deren Angriffspunkte in einer Ebene liegen. A_1, $A_2 \ldots A_4$ seien diese Angriffspunkte. Die Kräfte selbst sind sogleich in das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 eingetragen worden, welches in der willkürlich durch O gezogenen Axe XX liegt. Diese Axe nehmen wir als den einen der zu suchenden conjugirten Durchmesser. Wir denken uns dann die Kräfte parallel zu XX an ihren Angriffspunkten wirken und suchen ihre statischen Momente bezüglich jener Linie. Dies geschah mittelst des Kräftepolygons C 0 1 2 3 4, dessen Pol C willkürlich angenommen werden konnte, und aus dem das Seilpolygon 0 I II ... V construirt wurde. Die aufeinanderfolgenden Seiten desselben geben auf der Axe XX die Abschnitte 0 1', 1' 2' ... 3' 4', welche, bezogen auf die Basis C0, die Momente repräsentiren, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte senkrecht zu XX gemessen werden. Jene Abschnitte müssen dann als parallele Kräfte an den Angriffspunkten $A_1, A_2 \ldots A_4$ wirkend angenommen werden, worauf ihr Schwerpunkt mittelst des Kräftepolygons C 0 1' 2' ... 4' und der beiden Seilpolygone 0 I II' ... V' und 0'' I II'' ... V'', deren Seiten aufeinander senkrecht stehen, auf die bekannte Weise gefunden wird. Wir haben ihn mit S bezeichnet. Seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Mittelpunkt O gibt den zu XX conjugirten Durchmesser YY der Trägheitscurve.

Um die Längen der Durchmesser oder eigentlich der Halbdurchmesser zu finden, müssen die Trägheitsmomente der Kräfte bezüglich der Axen XX und YY gesucht werden, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in den Richtungen YY, bezw. XX zu messen sind. Für die Axe XX sind bereits die Abschnitte 0 1', 1' 2', ... 3' 4', die statischen Momente der Kräfte, erhalten worden, während der Abschnitt 0y zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons 0 I II' ... V' das Gesammt-Trägheitsmoment derselben ist, beide bezogen auf die Basis C0 und für Entfernungen gültig, die senkrecht auf XX gemessen werden. Da diese Entfernungen aber parallel zu YY genommen werden sollen, so muss statt der Basis C0 eine andere H_y genommen werden, die man erhält, indem man durch den Pol C eine Parallele zu YY bis an die Kräftelinie

zieht. Der Schwungradius setzt sich aus den gefundenen Grössen so zusammen, wie es der Ausdruck $\sqrt{\frac{H_y^2 \times \overline{0y}}{\Sigma P}}$ zeigt und kann hieraus auf bekannte Weise durch Construktion gefunden werden. Man zeichnet zuerst das bei c rechtwinkelige Dreieck dce, dessen Höhe $0c = H_y$, und in welchem der Abschnitt 0d der Grundlinie gleich $\Sigma P = 0\ 4$ ist. Der andere Abschnitt 0e ist folglich $\frac{H_y^2}{\Sigma P}$; indem man denselben um 0y verlängert und über der Summe ye einen Halbkreis beschreibt, erhält man den Schwungradius als die auf dem Durchmesser in 0 errichtete Senkrechte 0b′, welche als Ob vom Mittelpunkt O aus auf den conjugirten Durchmesser YY aufzutragen ist.

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Kraft P_1, deren Sinn wir immer als positiv auffassen wollen, und ΣP gleiches Vorzeichen, plus, dass dagegen das Gesammt-Trägheitsmoment 0y und das Trägheitsmoment 0 1″ der Kraft P_1 entgegengesetzten Sinn haben. Ersteres ist folglich negativ zu nehmen, und desshalb wird das Quadrat des Schwungradius negativ, der Schwungradius selbst also, oder der Halbdurchmesser Ob imaginär.

Um den auf XX liegenden Halbdurchmesser zu finden, hat man die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ an ihren Angriffspunkten $A_1, A_2 \ldots A_4$ parallel zu YY anzubringen. Wir zeichnen desshalb das dem C 0 1 2 3 4 ganz gleiche Kräftepolygon $C_1 O\ 1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1$ und das zugehörige Seilpolygon O I‴ II‴ ... V‴, dessen aufeinanderfolgende Seiten die Abschnitte O 1‴, 1‴ 2‴ ... 3‴ 4‴ auf YY machen. Zu dem hiedurch gebildeten Kräftepolygon C_1 O 1‴ 2‴ 3‴ 4‴ wird dann das Seilpolygon O I‴ $II^4 \ldots V^4$ construirt, dessen äusserste Seiten die Strecke Ox auf YY abschneiden. Diese Strecke repräsentirt das Gesammt-Trägheitsmoment der Kräfte bezüglich der Axe YY, bezogen auf die Basis $C_1 O$ und für senkrecht gemessene Entfernungen, indem $\overline{C_1 O}^2 \times Ox$ gleich jenem Trägheitsmoment ist. Da die Entfernungen schief, parallel zu XX gemessen werden sollen, so muss die durch den Pol C_1 zu XX gezogene Parallele H_x, die bis zur Kräftelinie reicht, als Basis genommen werden, so dass der gesuchte Schwungradius $= \sqrt{\frac{H_x^2 \times \overline{Ox}}{\Sigma P}}$ wird. Dieser Ausdruck wurde in ähnlicher Weise construirt, wie der ähnlich gebildete oben, und man fand so $Oa' = Oa$ als Länge des gesuchten zweiten Halbdurchmessers. Derselbe ist reell, weil Ox, das Gesammt-Trägheitsmoment, das nämliche Vorzeichen hat, wie das Trägheitsmoment $O 1^{IV}$ der als positiv angenommenen Kraft P_1. Die Trägheits-Curve wird folglich eine Doppelhyperbel mit den conjugirten Halbdurchmessern Oa und Ob.

Aus diesen letzteren erhält man leicht auf bekannte Weise die gemeinschaftlichen Asymptoten JJ und KK der beiden conjugirten Hyperbeln und durch Halbirung der Asymtotenwinkel die Hauptaxen AA und BB derselben. Um die Längen der letzteren zu finden, wendet man für einen der bereits bekannten Punkte a, b der Hyperbeln, für a etwa, den Satz an, dass das Produkt aus seinen in der Richtung der Asymptoten gemessenen Entfernungen ai, ak von diesen Linien gleich dem vierten Theil der Quadratsumme der beiden Halbaxen ist. Sucht man daher zu ai, oder Ok und ak die mittlere geometrische Proportionale kl und trägt diese doppelt vom Mittelpunkt O aus auf eine der Asymptoten als OD auf, so ist dies die Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten OA, OB, auf den Hauptaxen gelegen, den halben Längen dieser Axen gleich sind. A, A, B, B sind folglich die Scheitel der beiden conjugirten Hyperbeln, von denen in

der Figur Stücke gezeichnet wurden, und welche die Trägheits-Curve des gegebenen Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2 \dots P_4$ bilden.

§. 121. Centralfläche und Centralellipsoid. Beziehungen derselben zu den Trägheitsflächen. — Diejenige Trägheitsfläche eines Systems paralleler Kräfte, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt dieser Kräfte ist, heissen wir Centralfläche des Kräftesystems; Centralellipsoid in dem Falle, wo sie ein Ellipsoid wird, was allemal stattfindet, wenn sämmtliche Kräfte in gleichem Sinne gerichtet sind.

Für die Centralfläche ist der im §. 117 bewiesene Satz und das auf ihn gegründete Verfahren, die Trägheitsfläche bezw. drei conjugirte Durchmesser derselben zu finden, nicht mehr direkt anwendbar. Denn die algebraische Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte ist für jede Momentenebene, die durch den Schwerpunkt jener gelegt wird, gleich Null. Wir finden also keinen Schwerpunkt der als Kräfte an den gegebenen Angriffspunkten wirken zu denkenden statischen Momente (§. 61). Theilen wir aber diese (ähnlich wie dort im §. 61 die Kräfte) in zwei Gruppen und suchen den Schwerpunkt jeder dieser Gruppen, so hat die Verbindungslinie der so gefundenen beiden Schwerpunkte eine für uns wichtige Eigenschaft. Für jede zu ihr parallele Momentenebene nämlich ist die algebraische Summe der statischen Momente jener als Kräfte gedachten statischen Momente, also das Moment zweiter Ordnung $\Sigma P e e'$ Null, wenn e die Entfernungen von der ersten, e' die von der zweiten Momentenebene bedeuten. Denkt man sich daher jene erste, durch den Schwerpunkt S des Kräftesystems gehende Momenten-Ebene als XY Ebene eines beliebigen Coordinatensystems, dessen Z Axe durch den Schwerpunkt S parallel zu jener Verbindungslinie gelegt ist, so sind die Momente zweiter Ordnung $\Sigma P z x$ und $\Sigma P z y$ beide Null, und desshalb die Z Axe der XY Ebene in der Centralfläche conjugirt.

Dies gilt aber nicht blos für die Centralfläche, sondern für jede Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O in jener, durch den Schwerpunkt S des gegebenen Kräftesystems gehenden Momenten- oder XY Ebene liegt. Wenn durch ihren Mittelpunkt O die Z Axe gleichfalls parallel zu jener Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Gruppen, in welche die statischen Momente bezüglich der XY Ebene getheilt wurden, gelegt wird, so ist sie der XY Ebene auch in der Trägheitsfläche conjugirt. Noch mehr: die halbe Länge des so gefundenen conjugirten Durchmessers ist in der Centralfläche sowohl, wie in der Trägheitsfläche der Schwungradius des Kräftesystems für die XY Ebene und für die Richtung der Z Axe. Daraus folgt also: *In allen Trägheitsflächen eines Systems paralleler Kräfte, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden Ebene liegen, sind die dieser Ebene conjugirten Durchmesser parallel und von gleicher Grösse.* Alle diese Trägheitsflächen werden folglich von zwei zur Mittelpunktsebene parallelen und beiderseits gleichweit von derselben entfernten Ebenen berührt. Die Entfernung dieser gemeinschaftlichen Berührungsebenen von der Mittelpunktsebene ist gleich dem Schwungradius des Kräftesystems für letztere Ebene.

Wenn man in dem Coordinatensysteme SXYZ, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S eines Kräftesystems ist, und dessen Axe SZ in der Centralfläche der XY Ebene conjugirt ist und wie oben gefunden wurde, die Axe SX ganz beliebig annimmt, so gilt für die XZ Ebene dasselbe wie für die XY Ebene. Auch in Bezug auf sie ist die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte Null, und theilt man diese statischen Momente in zwei Gruppen, so hat die Verbindungslinie der Schwerpunkte derselben die Eigenschaft, dass in Bezug auf jede zu ihr parallele Ebene die Summe der statischen Momente jener als Kräfte gedachten statischen Momente oder das Moment zweiter Ordnung $\Sigma P e' e''$ Null wird, wo e' und e'' die Entfernungen

von den beiden Momentenebenen bedeuten. Von der XY Ebene haben wir oben schon bewiesen, dass für die besondere Lage, welche wir der Z Axe gegeben haben, ΣPzy Null wird, folglich ist jene Verbindungslinie der XY Ebene von selbst parallel, und wenn daher in letzterer die Y Axe, über welche noch verfügt werden kann, parallel zu jener Verbindungslinie der Schwerpunkte angenommen wird, so ist sie der XZ Ebene in der Centralfläche conjugirt und SZ, SY und SX sind also drei conjugirte Durchmesser dieser Fläche.

Aber die letzteren Betrachtungen gelten wieder nicht blos für die Centralfläche, sondern für jede Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O in der durch den Schwerpunkt des Kräftesystems gehenden Axe SX liegt. Wenn durch diesen Mittelpunkt O ebenfalls eine Y Axe parallel zur Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Gruppen gelegt wird, in welche man die statischen Momente bezüglich der XZ Ebene getheilt hat, so ist sie auch in der Trägheitsfläche der XZ Ebene conjugirt; und die halbe Länge dieses conjugirten Durchmessers ist wieder, hier in der Trägheitsfläche, wie dort in der Centralfläche, der Schwungradius des Kräftesystems bezüglich der Ebene XZ und für die Richtung der Y Axe. Daraus folgt: *In allen Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt S des gegebenen Kräftesystems gehenden Geraden liegen, sind die dieser Geraden conjugirten Ebenen parallel zu einander; und zu jedem Paar conjugirter Durchmesser in einer dieser Ebenen findet sich in jeder der anderen ein Paar ihnen gleiche und parallele, welche in der betr. Trägheitsfläche unter sich und zur Axe SX conjugirt sind.*

Sämmtliche Trägheitsflächen und die Centralfläche werden folglich von einem Cylinder zweiter Ordnung umhüllt, dessen gerade Erzeugende der Geraden, in der ihre Mittelpunkte liegen, parallel sind. Die Berührungslinien dieses Cylinders mit allen Trägheitsflächen sind congruente Curven zweiter Ordnung in parallelen Ebenen.

Die dritten conjugirten Durchmesser in der Reihe jener Trägheitsflächen, diejenigen, welche auf der Linie liegen, die alle ihre Mittelpunkte enthält, stehen auch in sehr einfacher Beziehung zu einander. Nehmen wir irgend eine solche Trägheitsfläche heraus, deren Mittelpunkt O die Entfernung i von dem Schwerpunkt S der Kräfte hat, und nennen wir E und $\mathfrak{E}$ die zur Linie SO conjugirten parallelen Ebenen in der Trägheits- und bezw. Centralfläche, q und $\mathfrak{q}$ die Entfernungen irgend eines Angriffspunktes von ihnen. Diese Entfernungen messen wir in der Richtung der Linie SO und nennen sie positiv, wenn der betr. Angriffspunkt nach derjenigen Seite der Ebene E bezw. $\mathfrak{E}$ hin liegt, auf welcher der Schwerpunkt von jener ersteren Ebene aus gelegen ist. Dann ist i, die Entfernung der beiden Ebenen, wesentlich positiv, und bezeichnen wir mit a und $\mathfrak{a}$ die Längen der ihnen in der Trägheits- bezw. Centralfläche conjugirten Halbdurchmesser, so ist

$$a^2 \Sigma P = \Sigma Pq^2 \text{ und } \mathfrak{a}^2 \Sigma P = \Sigma P\mathfrak{q}^2,$$

wobei q und $\mathfrak{q}$ in der einfachen Beziehung stehen

$$q = \mathfrak{q} + i.$$

Dieser zufolge wird

$$\Sigma Pq^2 = \Sigma P(\mathfrak{q} + i)^2 = \Sigma P\mathfrak{q}^2 + 2i\, \Sigma P\mathfrak{q} + i^2 \Sigma P$$

oder, da $\mathfrak{E}$ eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene, also $\Sigma P\mathfrak{q} = 0$ ist,

$$\Sigma Pq^2 = \Sigma P\mathfrak{q}^2 + i^2 \Sigma P,$$

woraus im Zusammenhalte mit obigen beiden Gleichungen folgt:

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2.$$

Für eine Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O auf der anderen Seite des Schwerpunktes S liegt, erhält man die nämliche Formel; daraus folgt, dass die Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt des Kräftesystems gehenden Geraden liegen, symmetrisch um diesen Schwerpunkt angeordnet sind; d. h. je zwei, deren Mittelpunkte zu beiden Seiten gleichweit vom Schwerpunkt entfernt liegen, sind congruent.

Ist der Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$ der Centralfläche, welcher auf der durch den Schwerpunkt gehenden Linie liegt, reell, also $\mathfrak{a}^2$ positiv, so sind alle Halbmesser a der Trägheitsflächen auch reell und stets grösser als $\mathfrak{a}$. Sämmtliche Trägheitsflächen sind folglich mit der Centralfläche gleicher Art und schliessen den Schwerpunkt in den Raum ein, in welchem ihr Mittelpunkt liegt.

Ist aber $\mathfrak{a}$ imaginär, $\mathfrak{a}^2$ negativ, die Centralfläche also jedenfalls ein Doppelhyperboloid, so sind die Trägheitsflächen, deren Mittelpunkt O nahe am Schwerpunkt liegt, zunächst noch gleicher Art mit der Centralfläche. Diejenige Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt um den absoluten Werth des Halbdurchmessers $\mathfrak{a}$ von dem Schwerpunkt entfernt ist, schrumpft zu einer Ellipse oder Hyperbel zusammen, congruent mit derjenigen, in welcher die Centralfläche von der Ebene $\mathfrak{E}$ geschnitten wird. Für grössere Entfernungen geht in dem ersten Fall, wo die beiden anderen Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Centralfläche reell sind, das Doppelhyperboloid in ein Ellipsoid über, im zweiten Fall aber in ein anderes Doppelhyperboloid, in welchem das einmantelige mit dem zweimanteligen vertauscht ist.

§. 122. Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente eines Systems paralleler Kräfte. — Denken wir uns wieder durch den Schwerpunkt S (Fig. 83, Taf. XIX) eines Systems paralleler Kräfte die gerade Linie NN′ gezogen, welche die Centralfläche in den Punkten A und A′ durchschneidet. Solche Durchschnittspunkte erhält man allemal, wenn nur die Linie NN′ in dem Falle, wo die Centralfläche ein Doppelhyperboloid wird, nicht gerade auf dem asymptotischen Kegel liegt. $\mathfrak{E}$ sei die zur Linie NN′ conjugirte Ebene in der Centralfläche, E eine ihr parallele durch einen beliebigen Punkt O der Linie NN′ und also in der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt O ebenfalls der Linie NN′ conjugirt. Dann liegt der Schwerpunkt der statischen Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Ebene E, wenn diese statischen Momente als Parallelkräfte in den Angriffspunkten der gegebenen wirken gedacht werden, in der Linie NN′, und unsere Aufgabe soll nun die sein, seinen Ort in derselben zu bestimmen. Nennen wir zu diesem Behufe q die Entfernungen der Angriffspunkte von der Ebene E, gemessen in der Richtung der Linie NN′ und positiv gerechnet, wenn die betr. Punkte auf derjenigen Seite der Ebene E liegen, auf welcher der Schwerpunkt S liegt; dann ist die Entfernung SO dieses letzteren von der Ebene E, die wir mit i bezeichnen wollen, als wesentlich positive Grösse zu betrachten. Mit $\mathfrak{q}$ wollen wir die Entfernungen der Angriffspunkte von der Ebene $\mathfrak{E}$ bezeichnen, voraussetzend, dass sie ebenfalls in der Richtung der Linie NN′ gemessen und in demselben Sinne wie die q positiv genommen werden. Dann ist stets

$$q = \mathfrak{q} + i,$$

und die Trägheitsmomente der Kräfte bezüglich der Ebenen E und $\mathfrak{E}$ stehen in der einfachen Beziehung zu einander, dass

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P (\mathfrak{q} + i)^2 = \Sigma P \mathfrak{q}^2 + i^2 \, \Sigma P$$

oder, wenn der Halbdurchmesser SA = SA′ der Centralfläche mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet wird,

$$\Sigma P q^2 = (\mathfrak{a}^2 + i^2) \, \Sigma P.$$

Sei nun m die Entfernung des Schwerpunktes M der Momente der gegebenen Kräfte in

Bezug auf die Ebene E von dieser letzteren, und $\mathfrak{m}$ seine Entfernung von der Ebene $\mathfrak{E}$, beide in demselben Sinne positiv oder negativ gerechnet wie die q und $\mathfrak{q}$, dann ist wieder

$$m = \mathfrak{m} +$$

und nach dem bekannten Momentensatze (§. 60)

$$m\,\Sigma Pq = \Sigma Pq^2.$$

Aber auch die Summe der Momente Pq der Kräfte P in Bezug auf die Ebene E ist gleich dem Produkt aus der Entfernung i des Schwerpunktes S dieser Kräfte von derselben Ebene in die algebraische Summe der Kräfte, nämlich

$$\Sigma Pq = i\,\Sigma P;$$

und dies oben berücksichtigt gibt

$$m i\,\Sigma P = \Sigma Pq^2 = (\mathfrak{a}^2 + i^2)\,\Sigma P,$$

woraus

$$m i = \mathfrak{a}^2 + i^2,$$

und folglich

$$(\mathfrak{m} + i)\, i = \mathfrak{a}^2 + i^2$$

oder einfacher

$$\mathfrak{m} i = \mathfrak{a}^2.$$

Ist nun $\mathfrak{a}^2$ positiv, was allemal stattfindet, wenn die Centralfläche ein Ellipsoid ist, so wird $\mathfrak{m}$ jedenfalls positiv, und man hat es von S aus auf NN′ nach derjenigen Seite zu tragen, wo der Punkt O nicht liegt, um den gesuchten Schwerpunkt der Momente, M, zu erhalten. Denkt man sich dann zur Ebene E eine parallele Ebene E′, die mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt S liegt, und die wir kurz die Symmetralebene zu E nennen wollen, so ist vermöge der obigen Relation M der Pol der Ebene E′ in der Centralfläche, und zwar in dem Falle, wo letztere ein Doppelhyperboloid ist, in demjenigen von den beiden Hyperboloiden, das von NN′ geschnitten wird. Ist aber $\mathfrak{a}^2$ negativ, AA′ also eigentlich ein imaginärer Durchmesser, dann wird $\mathfrak{m}$ aus obiger Relation auch negativ und ist folglich von S aus auf NN′ nach derjenigen Seite hin zu tragen, wo O liegt; es ist also der Schwerpunkt —M der Momente in Bezug auf die Ebene E der Pol dieser Ebene selbst, und zwar in demjenigen Hyperboloid der Centralfläche, die jetzt nur ein Doppelhyperboloid sein kann, welches von NN′ wirklich in den Punkten A und A′ geschnitten wird. Uebersichtlicher ist es, auch hier auf die Symmetralebene E′ der Ebene E überzugehen; dann ist —M der Pol der Ebene E′ in dem conjugirten Hyperboloid, das von NN′ nicht geschnitten wird, in welchem also AA′ wirklich imaginärer Durchmesser ist.

Daraus folgt der Satz: **Wenn man sich die statischen Momente der Kräfte eines gegebenen Parallel-Kräftesystems in Bezug auf eine Ebene E wieder als parallele Kräfte in den Angriffspunkten der gegebenen wirken denkt, dann ist ihr Schwerpunkt der Pol derjenigen Ebene E′ in der Centralfläche, die zur Ebene E parallel ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt des Kräftesystems liegt.** In dem Falle, wo die Centralfläche ein Doppelhyperboloid ist, hat man zu beachten, ob derjenige Durchmesser desselben, welcher der Ebene E conjugirt ist, reell oder imaginär wird, d. h. ob das Quadrat des Schwungradius der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Ebene $\mathfrak{E}$, die parallel zu E durch den Schwerpunkt des Kräftesystems geht, positiv oder negativ ist. In jedem Fall ist der Schwerpunkt der Momente der Pol der Symmetralebene E′ in demjenigen von den beiden Hyperboloiden, aus denen das Doppelhyperboloid besteht, für welches jener Durchmesser reell, bezw. imaginär ist.

§. 123. Besonderer Fall: Parallele Kräfte, deren Angriffspunkte in einer Ebene liegen.

— Die Betrachtungen, welche wir in den beiden vorhergehenden Nummern anstellten, sind leicht auf den Fall zu übertragen, wo die Angriffspunkte sämmtlicher parallelen Kräfte in einer Ebene liegen, und folglich die Trägheitsflächen in Curven, die Centralflächen in die sog. Centralcurven übergehen. Für jede in dieser Ebene liegende Axe, die durch den Schwerpunkt der Kräfte hindurchgeht, ist dann die Summe der statischen Momente der Kräfte Null. Der zu jener Axe conjugirte Durchmesser der Centralcurve muss also so gefunden werden, dass man die Kräfte in zwei Gruppen theilt und den Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente jeder Gruppe sucht. Die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte ist, der Richtung nach, jener Axe in der Centralcurve conjugirt.

Hieraus folgt, dass in allen Trägheitscurven, deren Mittelpunkte auf einer Linie liegen, welche durch den Schwerpunkt der Kräfte in der Ebene der Angriffspunkte derselben gezogen ist, die jener Linie conjugirten Durchmesser parallel und von gleicher Grösse sind. Alle diese Trägheitscurven, einschliesslich der Centralcurve, werden daher von zwei Linien berührt, die parallel zu derjenigen Geraden sind, welche ihre Mittelpunkte enthält, und beiderseits gleichweit von derselben entfernt liegen. Die anderen Durchmesser, welche in der durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden Geraden selbst liegen, stehen in einfacher Beziehung zu einander. Ist $\mathfrak{a}$ der halbe Durchmesser dieser Art in der Centralcurve, a der in einer beliebigen Trägheitscurve, deren Mittelpunkt in der Entfernung i vom Kräfteschwerpunkt liegt, so ist

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2.$$

Die Trägheitscurven, deren Mittelpunkte in irgend einer durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden geraden Linie liegen, sind folglich wieder um jenen Schwerpunkt symmetrisch angeordnet; zwei, deren Mittelpunkte beiderseits gleichweit vom Schwerpunkt entfernt liegen, sind congruent. Wenn der Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$ in der Centralcurve reell ist, $\mathfrak{a}^2$ also positiv, so ist a^2 auch stets positiv und grösser als $\mathfrak{a}$. Alle die in Rede stehenden Trägheitscurven sind also gleicher Art wie die Centralcurve und schliessen den Schwerpunkt ein. Ist aber $\mathfrak{a}^2$ negativ, die Centralcurve also jedenfalls eine Hyperbel, dann sind die Trägheitscurven, deren Mittelpunkte noch eine kleine Entfernung i vom Kräfteschwerpunkt haben, kleiner als die Strecke $\mathfrak{a}$, auch noch von gleicher Art wie die Centralcurve, also Hyperbeln. Für eine Entfernung $i = \mathfrak{a}$ reducirt sich die Trägheitscurve auf eine gerade Linie, die dem zur Linie der Mittelpunkte conjugirten Durchmesser in der Centralcurve gleich und parallel ist. Und für noch grössere Entfernungen i gehen die Trägheitshyperbeln in Ellipsen über.

Der Schwerpunkt der als Kräfte in den gegebenen Angriffspunkten wirken gedachten statischen Momente der Kräfte in Bezug auf irgend eine in der Ebene ihrer Angriffspunkte gezogene Axe ist in der Centralcurve der Pol einer Linie, welche parallel jener Axe in gleicher Entfernung vom Kräfteschwerpunkt wie sie, aber auf der entgegengesetzten Seite desselben gezogen wird. In dem Falle, wo die Centralcurve eine Doppelhyperbel ist, hat man zu beachten, ob derjenige ihrer Durchmesser, welcher der Richtung der Momentenaxe conjugirt ist, reell oder imaginär wird. In jedem Falle ist der Schwerpunkt der statischen Momente der Kräfte der Pol einer zur Momentenaxe symmetrisch gelegenen Linie in derjenigen von den beiden Hyperbeln, für welche jener Durchmesser reell oder imaginär wird.

§. 124. Fälle, wo conjugirte Richtungen und Stellungen in den Trägheitsflächen unmittelbar angegeben werden können. — Es gibt einzelne besondere Fälle, in denen conjugirte Richtungen und Stellungen in den Trägheitsflächen unmittelbar angegeben werden können, so dass

nur noch die Grösse der betr. Halbdurchmesser zu bestimmen bleibt. Wir wollen einige der wichtigsten dieser Fälle hier anführen.

1) Die Kräfte und ihre Angriffspunkte seien so gegeben, dass letztere paarweise durch parallele Linien verbunden werden können, und dass die Schwerpunkte der Kräftepaare, die an den Enden jener Parallellinien wirken, sämmtlich in einer und derselben Ebene E liegen. Dann sind die Richtungen der Parallellinien und die Stellung dieser Ebene E in allen denjenigen Trägheitsflächen conjugirt, deren Mittelpunkte auf der durch den Schwerpunkt des ganzen Kräftesystems gezogenen Parallelen zu jenen Verbindungslinien liegen.

Dies ist leicht zu beweisen. Für jedes der obigen Kräftepaare ist die Summe der statischen Momente bezüglich der Ebene E Null. Diese statischen Momente, als Kräfte an den gegebenen Angriffspunkten angebracht, bilden folglich je ein Paar paralleler und entgegengesetzt gerichteter, gleicher Kräfte, deren Momentensumme bezüglich jeder zu den Verbindungslinien der Angriffspunkte parallelen Ebene Null ist. Dies ist folglich auch für alle Kräfte des Systems der Fall und desshalb ist die Richtung jener Verbindungslinien der Ebene E in der Centralfläche sowohl, als in jeder Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt die oben bezeichnete Lage hat, conjugirt.

2) Wenn die gegebenen Kräfte so gruppirt werden können, dass die Angriffspunkte der zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in parallelen Ebenen und die Schwerpunkte der Gruppen in einer und der nämlichen geraden Linie MM liegen, so ist diese gerade Linie der Stellung der Parallel-Ebenen conjugirt in der Centralfläche sowohl, als in den Trägheitsflächen, welche ihren Mittelpunkt auf ihr liegen haben.

Denn nimmt man irgend eine jenen Parallel-Ebenen parallele Ebene E als Momentenebene, so sind die Angriffspunkte der Kräfte innerhalb jeder der obigen Gruppen gleichweit von ihr entfernt. Desshalb sind die statischen Momente der Kräfte diesen selbst proportional; werden sie also an den Angriffspunkten der letzteren als Kräfte angebracht, so fällt ihr Schwerpunkt mit dem der Kräfte zusammen, also in die Linie MM. Dies gilt für alle Gruppen und desswegen liegt der Schwerpunkt der statischen Momente des ganzen Kräftesystems bezüglich der Ebene E ebenfalls in der Linie MM, in welcher auch der Schwerpunkt des Kräftesystems selbst liegt. Die Linie MM ist folglich der Stellung der Ebene E und damit auch der jener Parallelebenen conjugirt in der Centralfläche und in all' den Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte auf MM liegen.

3) Wenn die gegebenen Kräfte so gruppirt werden können, dass die Mittelpunkte der Centralflächen der einzelnen Gruppen auf einer geraden Linie MM liegen, und die zu dieser Linie conjugirten Ebenen in den Centralflächen untereinander parallel sind, dann ist auch in der Centralfläche des ganzen Systems die Linie MM der Stellung jener Parallelebenen conjugirt.

Denn für irgend eine, zu jener Ebene parallele Momentenebene E liegt der Schwerpunkt der statischen Momente der innerhalb einer jeden Gruppe enthaltenen Kräfte auf der Linie MM. Folglich liegt der Schwerpunkt der statischen Momente des ganzen Systems bezüglich derselben Ebene gleichfalls auf der Linie MM, auf welcher auch der Schwerpunkt der Kräfte selbst liegt. Diese ist desshalb der Ebene E conjugirt in allen Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte auf ihr liegen, und in der Centralfläche.

Der vorige Satz ist eigentlich nur ein spezieller Fall des eben bewiesenen; die Centralflächen reduciren sich dort auf Centralcurven in der Ebene der Angriffspunkte der Gruppen. Für die beiden Fälle in Nr. 2 und 3 lässt sich nun noch folgender Satz aufstellen:

4) Wenn im Falle der Nr. 2 je zwei conjugirte Durchmesser der Centralcurven in allen Gruppen parallel laufen, oder wenn im Falle der Nr. 3 die parallelen, der Linie MM in den ein-

zelnen Centralflächen conjugirten Ebenen zwei conjugirte Durchmesser dieser Centralflächen enthalten, die in allen Gruppen die nämlichen Richtungen haben, so gibt es auch von der Centralfläche des ganzen Systems in der zur Linie MM conjugirten Ebene zwei conjugirte Durchmesser, die jenen parallel sind.

Denn denkt man sich durch die eine Reihe der parallelen Durchmesser der Central-Curven oder -Flächen der Gruppen eine Ebene E' gelegt, so schneidet diese die in der Centralfläche des ganzen Systems zur Linie MM conjugirte Ebene in einer zu jenen Durchmessern parallelen Linie $M'M'$. Wenn dann die Kräfte jeder Gruppe in beliebige zwei Theile getheilt werden, so ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte der, bezüglich jener Ebene E' genommenen statischen Momente je zweier solcher zusammengehöriger Theile einer Gruppe, der Ebene E', bezw. (im Falle der Nr. 2) den in ihr liegenden Durchmesser, in der Centralfläche oder -Curve der Gruppe conjugirt. Diese Verbindungslinien, an deren Endpunkten man sich je zwei gleiche und parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte (oder eigentlich statische Momente) wirken zu denken hat, sind aber, der Voraussetzung gemäss, alle parallel, und daher ist die Gesammtsumme der statischen Momente jener als Kräfte gedachten Momente Null bezüglich jeder zu den Verbindungslinien parallelen Ebene. Die Richtung dieser Verbindungslinien ist folglich auch in der Centralfläche des ganzen Systems der Ebene E' und damit der Linie $M'M'$ conjugirt.

§. 125. Fälle, wo conjugirte Richtungen in den Trägheitscurven unmittelbar angegeben werden können. — Die Uebertragung der Sätze im vorigen §. auf den speziellen Fall, wo die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte in einer Ebene liegen, oder wo, wie wir kurz sagen wollen, die Kräfte ein ebenes System bilden, ist sehr einfach. Wir begnügen uns, die Resultate hiefür anzuführen, und überlassen es dem Leser, die Beweise den obigen allgemeinen nachzubilden.

1) Wenn in einem ebenen System paralleler Kräfte diese paarweise so gruppirt werden können, dass die Verbindungslinien der Angriffspunkte der Gruppen alle parallel laufen, und dass die Schwerpunkte der Kräftepaare, die an den Enden jener Parallellinien wirken, sämmtlich in ein und derselben geraden Linie liegen, so ist diese der Richtung jener parallelen Verbindungslinien in der Centralcurve des Systems und in allen Trägheitscurven desselben, deren Mittelpunkte auf ihr liegen, conjugirt.

2) Wenn die Kräfte des ebenen Systems so gruppirt werden können, dass die Angriffspunkte der zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in parallelen Linien und die Schwerpunkte der Gruppen in einer und derselben Geraden liegen, so ist letztere der Richtung jener Parallellinien conjugirt in der Centralcurve sowohl als auch in den Trägheitscurven, deren Mittelpunkte auf ihr liegen.

3) Wenn die Kräfte eines ebenen Systems so gruppirt werden können, dass die Mittelpunkte der Centralcurven der einzelnen Gruppen auf einer geraden Linie liegen, und die zu dieser Linie conjugirten Durchmesser in den einzelnen Centralcurven untereinander parallel sind, dann ist auch in der Centralcurve des ganzen Systems die Linie MM der Richtung jener parallelen Durchmesser conjugirt.

§. 126. Specieller Fall, wo die unmittelbar angebbaren conjugirten Richtungen und Stellungen senkrecht aufeinander stehen. — In allen Fällen der beiden vorhergehenden Paragraphen, wo die conjugirten Linien und Ebenen senkrecht aufeinander stehen, hat man es mit den Hauptaxen und den ihnen conjugirten Ebenen der betreffenden Central- und Trägheitsflächen, bezw. -Curven zu thun.

§. 127. Construktion der Centralfläche eines Systems paralleler Kräfte aus den bekannten Centralflächen der Gruppen, in welche jenes System zerlegt werden kann. — Es bleibt nun noch zu erörtern, wie die Centralfläche F_0 eines Systems paralleler Kräfte gefunden werden kann, wenn die Centralflächen F', F'', F''' ... der Gruppen, in welche das Kräftesystem zerlegt wurde, bekannt sind, und diese letzteren eine ganz beliebige Lage und Gestalt haben.

In Fig. 84, Taf. XIX mögen F', F'', F''' ... die Centralflächen der Gruppen mit den Mittelpunkten S', S'', S''' ..., den Schwerpunkten der Kräfte in diesen Gruppen, vorstellen, welche jedoch nicht alle in einer Ebene zu liegen brauchen, wie es nach der Zeichnung scheinen könnte. Der punktirt gezeichnete Theil der Fläche F'' sei derjenige, welcher mittelst der an ihn gelegten Tangentialebenen die Schwungradien gibt, deren Quadrat negativ ist. Die Kräfte der ersten Gruppe sollen mit P' (nämlich P'_1, P'_2 ...) bezeichnet werden, die der zweiten Gruppe mit P'', der dritten mit P''' u. s. w. Denkt man sich dann in den Mittelpunkten S', S'', S''' ... die parallelen Kräfte $P'_0 = \Sigma P'$; $P''_0 = \Sigma P''$; $P'''_0 = \Sigma P'''$ etc. wirken, so kann der Schwerpunkt S_0 derselben auf die bekannte Weise gefunden werden; er ist der Schwerpunkt des ganzen Kräftesystems und Mittelpunkt der Centralfläche desselben.

Sei nun E irgend eine Ebene, so ist der Schwerpunkt M' der statischen Momente der Kräfte P' in Bezug auf diese Ebene der Pol einer mit E symmetrisch zum Mittelpunkt S' liegenden Ebene in der Centralfläche F'. Er liegt folglich in dem zu E conjugirten Durchmesser $A'A'$ der letzteren Fläche und zwar so, dass

$$\overline{S'M'} = \frac{\overline{S'A'}^2}{\overline{S'O'}}$$

oder, wenn $S'M'$ mit $\mathfrak{m}'$, $S'A'$ mit $\mathfrak{a}'$ und $S'O'$ mit $\mathfrak{i}'$ bezeichnet wird, dass

$$\mathfrak{m}' = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\mathfrak{i}'}$$

ist (s. §. 122). In ganz ähnlicher Weise findet man die Schwerpunkte M'', M''' ... der statischen Momente der Kräfte P'', P''' ... bezüglich der Ebene E.

In diesen Schwerpunkten hat man sich die Summe der Momente der Kräfte P', P'', P''' ... bezüglich der Ebene E wirkend zu denken, also die Momente der in S', S'', S''' ... wirkenden Kräftesummen $\Sigma P'$, $\Sigma P''$, $\Sigma P'''$ ... Diese letzteren Momente hat man aber bereits construirt, indem man den Schwerpunkt S_0 aus den Schwerpunkten S', S'', S''' ... der Gruppen suchte, wenn man nur als Ebene E eine der Projektionsebenen wählt, welche man zu obiger Construktion nöthig hatte. Sucht man nun den Mittelpunkt (Schwerpunkt) M_0 jener in M', M'', M''' ... thätigen Kräfte auf bekannte Weise, dann ist die Verbindungslinie desselben mit dem Kräfte-Schwerpunkt S_0 des ganzen Systems der Stellung der Ebene E in der Centralfläche conjugirt. Sie ist der Durchmesser, welcher in der Centralfläche der Ebene $\mathfrak{E}$ conjugirt ist, die parallel zu E durch S_0 gelegt wurde. Die Länge dieses Durchmessers ist dann leicht zu finden. Seine von S_0 gleichweit entfernten Endpunkte A_0, A_0 müssen den Momenten-Schwerpunkt M_0 harmonisch entweder von dem Durchgangspunkt O_0 des Durchmessers durch die Ebene E trennen, oder von dem Durchgangspunkt O'_0 desselben durch eine Ebene E', welche parallel zu E ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt S_0 liegt, je nachdem M_0 und O_0 auf einerlei Seite, oder auf verschiedenen Seiten der Ebene $\mathfrak{E}$ liegen. Auf jeden Fall ist

$$\overline{S_0A_0}^2 = \overline{S_0M_0} \times \overline{O_0S_0},$$

wobei $\overline{S_0A_0}^2$ positiv oder negativ, der Halbdurchmesser S_0A_0 also reell oder imaginär wird, je nachdem O_0 und M_0 auf verschiedene oder auf einerlei Seite der Ebene $\mathfrak{E}$ fallen.

Auf ganz gleiche Weise kann man für eine zweite Ebene e, die parallel zum eben gefundenen Durchmesser A_0A_0 ist, den ihr conjugirten Durchmesser in der Centralfläche finden, der Richtung und Grösse nach. Er muss in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegen. Denkt man sich endlich durch S_0 parallel zur Ebene e eine Ebene $\mathfrak{e}$ gelegt, so schneidet diese die Ebene E in einer geraden Linie, welche mit den beiden schon gefundenen drei conjugirte Durchmesser der Centralfläche bildet. Diese ist also bestimmt, wenn noch auf irgend eine der schon bekannten Arten die Grösse des dritten Durchmessers gefunden wird.

§. 128 Construktion des Trägheitsmomentes eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene, wenn die Centralflächen der Gruppen bekannt sind, in welche jene Kräfte getheilt werden können. — In den Anwendungen kommt es häufig vor, dass der Schwerpunkt S_0 eines Kräftesystems, wie wir es im vorigen §. behandelt haben, schon bekannt ist, ebenso die Richtung, welche in der Centralfläche des ganzen Systems der durch den Schwerpunkt S_0 gelegten Ebene $\mathfrak{E}$ conjugirt ist, so dass nur noch erübrigt, die Länge des in jener Richtung liegenden, der Ebene $\mathfrak{E}$ conjugirten Durchmessers, also das Trägheitsmoment bezüglich der Ebene $\mathfrak{E}$ und für jene Richtung zu finden. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die letztbezeichnete Aufgabe einfacher durchführen, als es im vorigen §. an den betreffenden Stellen angedeutet wurde.

Seien in Fig. 84, Taf. XIX F', F''. F'''... wieder die Centralflächen der Gruppen P', P'', P'''..., in die das gegebene Kräftesystem zerlegt werden kann, und stellen wir uns die Aufgabe, das Trägheitsmoment des letzteren in Bezug auf eine beliebige Ebene E zu finden. Dann erhalten wir zunächst das Trägheitsmoment der Gruppe P', wenn wir irgend eine Trägheitsfläche derselben construiren, deren Mittelpunkt in E liegt. Die Entfernung der zu E parallelen Tangentialebenen an diese Fläche von E ist der Schwungradius des gesuchten Trägheitsmomentes. Unter allen Trägheitsflächen der Gruppe P' können wir aber diejenige am leichtesten finden, deren Mittelpunkt im Durchschnitt O' des zu E conjugirten Durchmessers $A'A'$ der Centralfläche F' mit der Ebene E liegt (s. §. 121). Zu jedem Paar conjugirter in der Ebene E liegenden Durchmesser der Trägheitsfläche findet sich ein Paar gleicher und paralleler in der Centralfläche F' und der dritte, zu E conjugirte Halbdurchmesser $O'N'$ hat nach §. 121 eine solche Länge a', dass

$$a'^2 = \mathfrak{a}'^2 + i'^2$$

ist, wenn wie im vorigen §. $\mathfrak{a}'$ den Halbdurchmesser $S'A'$ der Centralfläche und i' die Entfernung $S'O'$ des Mittelpunktes der Trägheitsfläche vom Mittelpunkte der Centralfläche bedeutet. In derselben Weise findet man die Endpunkte N'', N'''... der zu E conjugirten Halbdurchmesser der Trägheitsflächen der Gruppen P'', P'''... mit den Mittelpunkten O'', O'''... Bei der zweiten Gruppe hat man zu beachten, dass der Durchmesser $A''A''$ imaginär, also $\mathfrak{a}''^2$ negativ ist. Bezeichnen nun k', k'', k'''... die in der vorgeschriebenen Richtung gemessenen Entfernungen der Punkte N', N'', N'''... von der Momentenebene E, so sind

$$k'^2\Sigma P',\ k''^2\Sigma P'',\ k'''^2\Sigma P'''\ldots$$

die Trägheitsmomente der einzelnen Kräftegruppen und folglich

$$k'^2\Sigma P' + k''^2\Sigma P'' + k'''^2\Sigma P''' + \ldots$$

das gesuchte Trägheitsmoment des ganzen Systems. Um dasselbe zu erhalten, hat man sich folglich in den Punkten N', N'', N'''... die Kräftesummen $\Sigma P'$, $\Sigma P''$, $\Sigma P'''$... wirken zu denken

und für dieselben das Trägheitsmoment bezüglich der Ebene E ganz so zu construiren, wie es im §. 113 für Einzelkräfte gezeigt worden ist. Es ist dabei gleichgültig, an welchem der beiden Endpunkte des zu E conjugirten Durchmessers der betr. Trägheitsfläche die obigen Kräftesummen angebracht werden; denn das Trägheitsmoment einer Kraft ist unabhängig von dem Vorzeichen der Entfernung ihres Angriffspunktes von der Momentenebene; aber die Kräftesumme selbst muss in dem ihrem eigenen Vorzeichen entsprechenden Sinne oder im entgegengesetzten genommen werden, je nachdem der Durchmesser, an dessen Ende sie wirkt, reell oder imaginär ist, je nachdem also das Vorzeichen von a'^2, a''^2, a'''^2... nach obiger Formel positiv oder negativ wird.

Bei dem eben gezeigten Verfahren für die Construktion des Trägheitsmomentes sind in der willkürlich anzunehmenden Projektionsebene zwei Kräfte- und Seilpolygone zu construiren, wie in dem Verfahren des vorigen §. auch. Aber während dort das eine Seilpolygon zwischen den Parallelen zu ziehen ist, welche durch die Projektionen der Punkte S', S'', S'''... auf die Projektionsebene gelegt werden, das andere zwischen den Parallelen durch die Projektionen der Punkte M', M'', M'''..., können hier beide Seilpolygone zwischen denselben Parallelen, welche durch die Projektionen der Punkte N', N'', N'''... hindurchgehen, construirt werden; und das vereinfacht natürlich die Construktion.

Wie sich die Betrachtungen dieses und des vorigen §. modificiren und vereinfachen, wenn sämmtliche Angriffspunkte der gegebenen Kräfte in einer Ebene liegen, ist leicht zu übersehen. Ein Beispiel für einen praktischen Fall der letzteren Art werden wir im §. 141 durchführen.

XI. Abschnitt.

System paralleler Kräfte, deren Intensitäten den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene proportional sind. — Centralellipsoid, Centralellipse und Kern von Körpern und ebenen Figuren (Querschnitten).

§. 129. Mittelpunkt und statisches Moment, dann Trägheitsfläche und Centralfläche, Trägheits-Curve und Centralcurve von Parallelkräften, welche den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Neutral-Ebene oder -Axe proportional sind. — Das im vorhergehenden Abschnitt Vorgetragene findet seine praktische Verwendung hauptsächlich für Kräfte, deren Intensität den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene, die wir Neutralebene nennen wollen, proportional sind. Bezeichnen wir mit $p_1, p_2, p_3 \ldots$ parallele Kräfte, die an Angriffspunkten wirken, deren in bestimmter Richtung gemessene Entfernungen von der Neutralebene E $e_1, e_2, e_3 \ldots$ sein mögen, und sind $C_1, C_2, C_3 \ldots$ Constante der Art, dass

$$p_1 = C_1 e_1, \;\; p_2 = C_2 e_2, \;\; p_3 = C_3 e_3 \ldots,$$

so sind die Kräfte p nichts anderes als die bezüglich der Neutralebene genommenen statischen Momente der Constanten C, welche man sich an den gegebenen Angriffspunkten als Kräfte wirken denkt. Die statischen Momente $p_1 e_1, p_2 e_2, p_3 e_3 \ldots$ der Kräfte p bezüglich der Neutralebene sind die Trägheitsmomente $C_1 e_1^2, C_2 e_2^2, C_3 e_3^2 \ldots$ derselben Constanten. Der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p endlich, d. h. ihr Mittelpunkt oder Schwerpunkt, ist der Schwerpunkt der Momente $C_1 e_1, C_2 e_2 \ldots$, die an den gegebenen Angriffspunkten wirken. Dabei hat man den Entfernungen e das positive oder negative Vorzeichen zu geben, je nachdem die Angriffspunkte auf der einen oder anderen Seite der Neutralebene liegen; und hiernach richten sich natürlich auch die Vorzeichen der Kräfte p. Alles also, was im vorhergehenden Paragraphen gesagt wurde, lässt sich unmittelbar auf das obige System paralleler Kräfte p anwenden, wenn man nur an Stelle der Kräfte P die Constanten C setzt, ferner an Stelle der statischen Momente Pq der Kräfte P die Kräfte p und endlich an Stelle der Trägheitsmomente Pq^2 die statischen Momente pe der Kräfte p bezüglich der Neutralebene. Der Schwerpunkt der statischen Momente Pq ist der Mittel- oder Schwerpunkt der Kräfte p.

Wenn man das Gesammt-Trägheits-Moment der Constanten C oder das gesammte statische Moment der Kräfte p durch die Summe der Constanten selbst dividirt, so ist der Quotient das Quadrat einer Grösse, die wir Schwungradius des Kräftesystems für die Neutral-Ebene E nennen. Zwei Ebenen E′, E″ zu beiden Seiten der Neutralebene E in einer Entfernung gleich jenem Schwungradius gezeichnet und zwar für alle Lagen der Neutralebene, die sie annimmt, indem sie sich um einen festen Punkt O dreht, umhüllen eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt,

dem Punkt O. Diese Fläche heisst im Allgemeinen Trägheitsfläche des Kräftesystems und Centralfläche dann, wenn der feste Punkt O, ihr Mittelpunkt, der Schwerpunkt S der Constanten C ist.

Für irgend eine Lage der Neutralebene E ist der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p der Pol, welcher in der Centralfläche einer Ebene E' zugehört, die der Neutralebene parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt S liegt. Für alle Lagen der Neutralebene, wo sie durch den Schwerpunkt S der Constanten selbst geht, wird die Summe der Kräfte p Null und fällt ihr Angriffspunkt in unendliche Entfernung.

Für Kräfte, deren Angriffspunkte alle in einer Ebene liegen, tritt an Stelle der Neutralebene eine neutrale Axe in der Ebene der Angriffspunkte. Die Trägheitsflächen und die Centralfläche gehen in Curven zweiten Grades mit einem Mittelpunkt über, die entsprechend Trägheits- und Centralcurven heissen. Der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p ist der Pol, welcher in der Centralcurve einer Linie zugehört, die parallel zur Neutralaxe ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt der Constanten C, dem Mittelpunkt der Centralcurve, liegt.

§. 130. Statisches Moment, Trägheitsmoment und Schwungradius, dann Trägheits- und Central-Ellipsoid, Trägheits- und Centralellipse von Körpern und bezw. Querschnitten. — In der Regel greifen die im vorigen §. behandelten Kräfte p an allen Molekülen oder Elementen eines Körpers, bezw. einer Fläche an, und sind dann nicht blos den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Neutralebene bezw. Neutralaxe proportional, sondern auch den Volumen- oder Flächenelementen $v_1, v_2, v_3 \dots$ bezw. $f_1, f_2, f_3 \dots$, welche ihre Angriffspunkte umschliessen oder als diese selbst genommen werden können. In diesem Falle hat man die Constanten

$$C_1, C_2, C_3 \dots$$

einfach den Produkten

$$Av_1, Av_2, Av_3 \dots$$

oder

$$Af_1, Af_2, Af_3 \dots$$

gleichzusetzen, worin A eine absolute Constante bedeutet. Die Summe der Constanten C wird dann

$$A \Sigma v \text{ oder } AV$$

bezw.

$$A \Sigma f \text{ oder } AF,$$

wo V den Voluminhalt des ganzen Körpers, F den Inhalt des Querschnitts bezeichnet, an welchen die Kräfte wirken. Diese Kräfte p selbst werden

$$Av_1 e_1, Av_2 e_2, Av_3 e_3 \dots$$

oder

$$Af_1 e_1, Af_2 e_2, Af_3 e_3 \dots$$

und ihre Summe, gleich ihrer Resultante,

$$A \Sigma v e \text{ oder } A \Sigma f e.$$

Der Schwerpunkt S der Constanten C fällt offenbar mit dem des Körpers V oder der Fläche F zusammen. Die statischen Momente der Kräfte p in Bezug auf die Neutralebene bezw. Axe sind endlich

$$Av_1 e_1^2, Av_2 e_2^2, Av_3 e_3^2 \dots$$

oder

$$Af_1 e_1^2, Af_2 e_2^2, Af_3 e_3^2 \dots$$

und ihre Summe

$$A \Sigma v e^2 \text{ oder } A \Sigma f e^2.$$

Hieraus ist zunächst die Bedeutung der Constanten A leicht zu erkennen: sie ist gleich der Kraft, welche in der Entfernung Eins von der Neutralebene bezw. -Axe an der Volum- bezw. Flächeneinheit thätig ist. Da mit A alle die obigen Grössen einfach proportional sind, so dürfen wir die Constanten C auch gleich den Volum- oder Flächeninhalten v_1, v_2, v_3 . . . bezw. f_1, f_2, f_3 . . . setzen; ihre Summe ist dann dem Inhalte des Körpers, V, oder der Fläche, F, gleich und ihr Schwerpunkt wird der Schwerpunkt des Körpers V bezw. der Fläche F. Die Summe der Kräfte p wird gleich Σve bezw. Σfe, die wir die statischen Momente des Körpers oder bezw. der Fläche bezüglich der Neutralebene oder -Axe nennen. Die Summe der statischen Momente der Kräfte p endlich wird

$$\Sigma v e^2 \text{ bezw. } \Sigma f e^2$$

und heisst das Trägheitsmoment des Körpers bezw. der Fläche in Bezug auf die Neutral-Ebene oder -Axe.

Den Quotienten

$$\frac{\Sigma v e^2}{V} \text{ oder } \frac{\Sigma f e^2}{F}$$

setzen wir wieder dem Quadrat einer Grösse k gleich, die wir den Schwungradius des Körpers oder der Fläche bezüglich der Neutralebene oder -Axe nennen. Werden in Entfernungen gleich dieser Grösse k zu beiden Seiten der Neutralebene E oder -Axe N zwei denselben parallele Ebenen E′ und E″ bezw. Linien N′ und N″ gezeichnet, und zwar für alle Lagen, welche die Ebene E oder Axe N annehmen hann, indem sie stets durch einen festen Punkt O hindurchgeht, so umhüllen jene Ebenen und bezw. Geraden eine Fläche oder Curve zweiten Grades mit dem Punkte O als Mittelpunkt, welche wir die Trägheitsfläche oder -Curve des Körpers V oder des ebenen Querschnittes F nennen wollen. Sie wird zur Centralfläche (-Curve) des Körpers V (Querschnittes F), wenn ihr Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt S des Körpers (des Querschnittes) zusammenfällt.

In diesen letzteren Beziehungen vereinfachen sich aber die Verhältnisse im vorliegenden Falle wesentlich. Die Constanten v_1, v_2, v_3 . . . oder f_1, f_2, f_3 . . . sind als absolute Grössen zu betrachten, bei denen ein Gegensatz der Qualität, also der Vorzeichen nicht denkbar ist. Als parallele Kräfte an den Angriffspunkten wirkend sind sie desshalb alle im gleichen Sinne gerichtet. Die Trägheitsfläche eines Körpers wird also immer ein Ellipsoid, ebenso die Centralfläche; und in gleicher Weise sind die Trägheits- und Centralcurven ebener Querschnitte F immer Ellipsen. Wir werden daher in Zukunft nur von Trägheits- und Central-Ellipsoiden bezw. -Ellipsen sprechen.

Kennt man das Centralellipsoid eines Körpers, so ist der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p, die sich auf eine Neutralebene E beziehen, der Pol, welcher im Centralellipsoid der Symmetralebene E′ von E zugehört. In gleicher Weise ist der Angriffspunkt der Resultante von Kräften p, die in den Elementen eines Querschnittes wirken und diesen, sowie ihren Entfernungen von einer Neutralaxe N proportional sind, der Pol, welcher in der Centralellipse des Querschnitts einer Geraden N′ zugehört, die zu N parallel ist und symmetrisch mit ihr zum Schwerpunkt des Querschnitts liegt. Wenn die Neutralaxe N durch diesen Schwerpunkt selbst hindurch geht, so wird die Summe der Kräfte p Null und der Angriffspunkt ihrer Resultante fällt in unendliche Entfernung, d. h. sie bilden ein Gegenpaar. Aehnliches gilt natürlich für die Neutralebene eines Körpers.

Kräfte, deren Angriffspunkte die Elemente einer ebenen Fläche sind, kommen bei ge-

bogenen prismatischen Körpern vor. Nimmt man an, dass ebene Querschnitte eines solchen Körpers auch nach der Biegung eben bleiben und von gleicher Gestalt, dann sind die Spannungen der Fasern, welche von einem solchen Querschnitt getroffen werden, den Flächenelementen desselben und der Entfernung dieser Elemente von einer neutralen Axe proportional. Diese Spannungen sind parallele Kräfte p, welche an dem Querschnitt als Einwirkungen des einen Körpertheils auf den anderen, abgeschnittenen, angebracht werden müssen. Ihre Summe oder Resultante ist gleich dem statischen Moment des Querschnitts in Bezug auf die Neutralaxe, multiplicirt mit einer Constanten A, gleich der Spannung, welche in der Entfernung eins von der neutralen Axe pro Flächeneinheit wirkt. Jene Summe ist also Null, wenn die Neutralaxe durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Dann bilden alle Spannungen ein Gegenpaar. — Das statische Moment der Spannungen in Bezug auf die Neutralaxe ist gleich dem Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf dieselbe Axe, multiplicirt mit der nämlichen Constanten A wie oben. Diese Trägheitsmomente können für alle Lagen der Neutralaxe, in welchen dieselbe durch einen festen Punkt O geht, mittelst der Trägheits-Ellipse des Querschnitts für den Punkt O auf bekannte Weise gefunden werden. Dreht sich die neutrale Axe um den Schwerpunkt des Querschnitts, so wird die Trägheitsellipse zur Centralellipse.

Für irgend eine neutrale Axe wird der Angriffspunkt der Resultante der Spannungen der Pol einer mit der neutralen symmetrischen Axe in der Centralellipse. Dieser Angriffspunkt fällt also in unendliche Entfernung, wenn die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

§. 131. **Der Kern eines Körpers.** — In Folge des einfachen geometrischen Zusammenhangs, welcher zwischen der Neutralebene und dem Angriffspunkt der Resultante von Kräften besteht, die auf sie bezogen sind, lassen sich nach bekannten geometrischen Sätzen noch folgende Beziehungen zwischen beiden aufstellen:

1) Wenn die Neutralebene E ihre Stellung so verändert, dass sie immer durch einen fixen Punkt A hingurchgeht (sich um diesen Punkt dreht), so bleibt der Angriffspunkt der auf sie bezogenen Kräfte p eines Körpers auf einer Ebene, welche im Centralellipsoid des Körpers die Polarebene für einen Punkt A′ ist, der mit A symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegt, und um welchen sich gleichzeitig die Ebene E′ dreht, welche in Bezug auf den Schwerpunkt des Körpers zur Neutralebene symmetrisch liegt.

2) Wenn sich die Neutralebene E um eine feste Axe A dreht, so bleibt der Angriffspunkt der Resultante der auf sie bezogenen Kräfte p eines Körpers auf einer geraden Linie. Dieselbe ist in der Ellipse, nach welcher ein zur Axe A paralleler Cylinder das Centralellipsoid des Körpers berührt, die Polare des Punktes, in welchem die Ellipsenebene eine Linie A′ schneidet, welche zur Axe A parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt liegt; mit einem Wort, sie ist die Polare der Linie A′.

3) Wenn die Neutralebene den Körper, an welchem die auf sie bezogenen Kräfte p wirken, umhüllt, so dass sie, stets Tangentialebene an dessen Oberfläche bleibend, nie in das Innere desselben eindringt, dann bleibt der Angriffspunkt der Resultante jener Kräfte auf der Oberfläche eines Raumes, welcher der Kern (Centralkern) des Körpers heisst. Für alle Lagen der Neutralebene, in denen sie ganz von dem Körper ausgeschlossen ist, liegt der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte innerhalb des Kerns des Körpers, ausserhalb desselben dagegen, wenn die Neutralebene in den Körper eindringt.

Ein Beispiel möge dies erläutern. Eine Ebene habe die Eigenschaft, dass sie auf die

Moleküle eines Körpers, die auf ihrer einen Seite liegen, anziehende Kräfte ausübt, die parallel unter sich und den Massen der Moleküle, sowie den Entfernungen derselben von der Ebene proportional sind, wogegen von ihr aus auf Moleküle, die an ihrer anderen Seite liegen, abstossende Kräfte gleicher Art einwirken mögen. Dann liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft aller der an den Molekülen eines Körpers thätigen Kräfte jener Art innerhalb des Kerns dieses Körpers, so lange jene Ebene ganz ausserhalb des Körpers bleibt, und folglich alle an dem Körper thätigen Kräfte einerlei Natur sind, anziehender entweder oder abstossender. Umgekehrt gibt ein Heraustreten des Angriffspunktes aus dem Kern zu erkennen, dass die Ebene in den Körper eindringt und folglich ein Theil der Moleküle desselben von ihr angezogen, ein anderer abgestossen wird.

§. 132. **Der Kern eines Querschnitts.** — Die Uebertragung obiger Sätze auf den Fall, wo die Kräfte p an den Elementen einer ebenen Figur, eines Querschnitts, wirken, ist leicht.

1) Wenn sich die Neutralaxe, auf welche die an den Elementen eines Querschnitts thätigen Kräfte p bezogen sind, um einen festen Punkt A dreht, so bleibt der Angriffspunkt der Resultante jener Kräfte auf einer Linie, welche in der Centralellipse des Querschnitts die Polare eines Punktes A′ ist, der mit A symmetrisch gegen den Schwerpunkt des Querschnitts liegt.

2) Wenn die neutrale Axe, auf welche die an den Elementen eines Querschnitts wirkenden Kräfte p bezogen sind, den Querschnitt so umhüllt, dass sie, stets Tangente an ihm bleibend, nie in ihn eindringt, dann bleibt der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p auf der Umfangslinie einer Figur, welche der Kern des Querschnitts heisst. Für alle Lagen der neutralen Axe, wo sie von dem Querschnitt ganz ausgeschlossen ist, liegt jener Angriffspunkt innerhalb des Kerns; und er tritt aus demselben heraus, wenn die neutrale Axe in den Querschnitt eindringt.

An den Elementen der Querschnitte gebogener Körper wirken, wie oben erörtert, Spannungen, welche den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von der sogenannten neutralen Axe, sowie jenen Flächenelementen proportional und Zugspannungen auf der einen, Druckspannungen auf der anderen Seite der neutralen Axe sind. Der Angriffspunkt der Resultante aller in dem Querschnitt wirkenden Spannungen liegt innerhalb des Kerns dieses Querschnitts, so lange die neutrale Axe ausserhalb des letzteren bleibt, so dass alle jene Kräfte von einerlei Natur, entweder Zug- oder Druckspannungen sind. Tritt dagegen der Angriffspunkt der Resultante der Spannungen aus dem Kern heraus, so zeigt dies an, dass die neutrale Axe in den Querschnitt eindringt, so dass auf ihrer einen Seite Zug-, auf der anderen Druckspannungen stattfinden. Wenn folglich der Körper, durch welchen der Querschnitt gemacht wurde, blos Spannungen einerlei Art vertragen kann, wie z. B. Mauerwerk nur Druckspannungen widerstehen kann und soll, so darf der Angriffspunkt der Mittelkraft der Spannungen nicht aus dem Kern des Querschnitts heraustreten.

§. 133. **Centralellipsoid, Centralellipse und Kern einfacher Körper oder Querschnitte im Allgemeinen.** — Wir wenden uns nun zur Bestimmung des Centralellipsoids bezw. der Central-Ellipse und des Kerns von Körpern oder ebenen Figuren (Querschnitten) der Art, wie sie in der Praxis vorkommen. Dabei richten wir zunächst unser Augenmerk auf Körper und Querschnitte von solcher Gestalt, dass sie durch Parallelebenen oder -Linien, die in unendlich kleiner Entfernung aufeinander folgen, in Elemente (Platten oder Streifen) getheilt werden, deren Schwerpunkte alle in einer geraden Linie liegen, und deren Flächeninhalte oder Längen einfache Funktionen ihrer Entfernungen von einander sind. Von solchen Körpern oder Querschnitten, die wir kurz einfache nennen wollen, lässt sich ein Paar conjugirter Elemente des Centralellipsoids oder der Centralellipse sofort angeben. Die Stellung jener Parallelebenen oder Richtung der Parallellinien ist nach §§. 124 und 125 der Verbindungslinie der Schwerpunkte im Centralellipsoid,

bezw. in der Centralellipse conjugirt; und die Länge des Halbdurchmessers, welcher den parallelen Platten oder Streifen conjugirt ist, lässt sich durch Rechnung sehr einfach finden.

Es bezeichne nämlich y den Flächeninhalt oder die Länge eines der obigen Parallel-Elemente, in welche der Körper oder Querschnitt zerschnitten wurde, also einer Platte oder eines Streifens, x die in der Richtung des conjugirten Durchmessers gemessene Entfernung des Elementes von einer dazu parallelen Neutralebene bezw. -Axe, dx also die in derselben Richtung gemessene Dicke einer Platte oder Breite eines Streifens, endlich φ den Winkel, welchen der conjugirte Durchmesser mit jenen Parallelelementen bildet. Dann ist, die Integrale zwischen den gehörigen Grenzen genommen:

$\sin\varphi \int y\,dx$ der Inhalt des Körpers oder Querschnitts,

$\sin\varphi \int yx\,dx$ das statische Moment derselben bezüglich der Neutralebene oder -Axe und

$\sin\varphi \int yx^2\,dx$ das Trägheitsmoment bezüglich derselben Ebene oder Axe, beide Momente für die Richtung des conjugirten Durchmessers genommen.

Ist folglich k der Schwungradius des Körpers oder Querschnittes bezüglich jener Neutralebene oder -Axe und für Entfernungen, welche in der Richtung des dazu conjugirten Durchmessers gemessen werden, dann i die in derselben Richtung gemessene Entfernung des Schwerpunktes des Körpers oder Querschnittes von jener Ebene oder Axe, endlich $\mathfrak{a}$ der gesuchte Halbdurchmesser des Centralellipsoids oder der Centralellipse, so wird

$$k^2 \int y\,dx = \int y x^2\,dx$$

und weil

$$k^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2,$$

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int y x^2\,dx}{\int y\,dx} - i^2.$$

Nun ist nach der bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes

$$i = \frac{\int y x\,dx}{\int y\,dx}$$

und daher

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int y x^2\,dx}{\int y\,dx} - \left(\frac{\int y x\,dx}{\int y\,dx}\right)^2.$$

Im Falle, dass die Momentenebene oder -Axe gleich durch den Schwerpunkt gelegt wird, ist $\int y x\, dx = 0$ und folglich

$$a^2 = \frac{\int y x^2\, dx}{\int y\, dx}.$$

Für Körper oder Querschnitte von so einfacher Gestalt, wie wir sie oben vorausgesetzt haben, wird man am zweckmässigsten die Längen von Durchmessern auf die eben gezeigte Art durch Rechnung ermitteln und auftragen. Für solche dagegen, welche die obigen Bedingungen der „Einfachheit" nicht mehr oder nicht mehr vollständig erfüllen, ist das graphische Verfahren wieder vorzuziehen. Man zerlegt sie dann womöglich in Theile von solcher Gestalt, dass man deren Centralellipsoide und bezw. Centralellipsen wie oben finden kann, und construirt dann aus diesen auf die in den §§. 127 und 128 gezeigte Art das Centralellipsoid oder die Centralellipse des ganzen Körpers oder Querschnitts. Ist aber eine Zerlegung der obigen Art nicht mehr möglich, so zerschneidet man durch Parallel-Ebenen oder -Linien in so dünne Platten oder Streifen, dass man dieselben annähernd als Körper oder Flächen von einfacher Gestalt, als Prismen oder Paralleltrapeze, ansehen darf, und verfährt dann weiter, wie unten an einem Beispiele näher erörtert werden soll. Ist einmal das Centralellipsoid oder die Centralellipse gefunden, so ist der Kern des Körpers oder Querschnitts leicht su erhalten.

Centralellipse und Kern ebener Figuren (Querschnitte).

§. 134. Das Parallelogramm (Fig. 85, Taf. XIX). — In der Centralellipse des Parallelogramms ABCD sind die durch seinen Mittelpunkt O gelegten, zu den Seiten parallelen Linien EF, GH conjugirte Durchmesser. Für die Axe EF und für Entfernungen, die in der Richtung GH gemessen werden, ist

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} a x^2\, dx \sin\varphi = \tfrac{1}{12} a b^3 \sin\varphi$$

das Trägheitsmoment des Parallelogramms, vorausgesetzt, dass a und b die Seiten AB und AD desselben bezeichnen und φ den Winkel, den sie miteinander bilden. Das Quadrat des entsprechenden Schwungradius ist also

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12} a b^3 \sin\varphi}{a b \sin\varphi} = \tfrac{1}{12} b^2,$$

und seine Länge k ist gleich der des Halbdurchmessers der Centralellipse, der in GH liegt. In gleicher Weise wird die Länge des auf EF liegenden Halbdurchmessers als

$$k' = \sqrt{\tfrac{1}{12} a^2}$$

gefunden. Beide können entweder berechnet und aufgetragen werden, wo dann

$$k = 0{,}2887\, b \text{ und } k' = 0{,}2887\, a$$

wird; oder man kann sie construiren, indem man

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2} b . \tfrac{1}{6} b} \text{ und } k' = \sqrt{\tfrac{1}{2} a . \tfrac{1}{6} a}$$

setzt und die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{6}b$, bezw. $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{6}a$ zeichnet. Letzteres ist in der Figur mit Hülfe der beiden Halbkreise über BF und BH geschehen.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser $k k_1$, $k' k'_1$ ist die Centralellipse völlig bestimmt. Man kann sie direkt aus diesen zeichnen oder zuerst die Hauptaxen auf bekannte Weise finden. Für die Construktion des Kerns ist dies jedoch gar nicht nöthig. Denkt man sich die neutrale Axe zuerst mit AB zusammenfallend, so liegt der Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte, die am Parallelogramm wirken und auf AB bezogen sind, in dem zu AB conjugirten Durchmesser der Centralellipse so, dass er der Pol der mit AB symmetrisch liegenden Linie CD in jener Ellipse ist; oder es ist

$$\overline{O\gamma} = \frac{k^2}{\overline{OG}} = \frac{\frac{1}{12} b^2}{\frac{1}{2} b} = \tfrac{1}{6} b.$$

Dies ist unmittelbar aufzutragen. In gleicher Weise findet sich für die Lage BC der neutralen Axe der Angriffspunkt δ in dem zu BC conjugirten Durchmesser so, dass

$$\overline{O\delta} = \tfrac{1}{6} a.$$

Ebenso sind α und β, die Angriffspunkte für den Fall, dass die neutrale Axe mit CD oder DA zusammenfällt, so gelegen, dass

$$\overline{O\alpha} = \tfrac{1}{6} b \text{ und } \overline{O\beta} = \tfrac{1}{6} a$$

ist. Während sich die neutrale Axe um B dreht, um von der Lage AB in die BC überzugehen, durchläuft der Angriffspunkt der Resultante die gerade Linie $\gamma\delta$, und so überzeugt man sich leicht, dass das Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ der Kern des gegebenen Parallelogramms ist.

Aus diesem Kern kann man sich nun wieder mehrere Punkte der Centralellipse nebst ihren Tangenten auf einfache Weise verschaffen. Die Diagonalen AC und BD sind ebenfalls conjugirte Durchmesser der Centralellipse und $\beta\gamma$ die Polare des Punktes C in derselben, sie muss folglich durch die beiden Durchschnittspunkte c, c_1 der Linie AC mit der Ellipse harmonisch von letzterem Punkt getrennt werden, oder es muss

$$\overline{Oc}^2 = \overline{O\varepsilon} \times \overline{OC}$$

sein. Der Punkt c ist folglich leicht zu construiren. Es ist in der Figur mittelst des über OC beschriebenen Halbkreises geschehen. Die Tangente in ihm an die Centralellipse ist parallel zu $\beta\gamma$. — Aus dem Punkte c sind unmittelbar die mit ihm symmetrisch liegenden c_1, c_2, c_3 nebst ihren zu $\alpha\delta$, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ parallelen Tangenten zu erhalten.

Weil A der Pol der Linie $\alpha\delta$ in der Centralellipse ist, so berühren zwei von ihm an diese gezogene Tangenten die Ellipse in den beiden Punkten d und d_1, in denen sie von $\alpha\delta$ geschnitten wird. Dabei liegen die Punkte d und d_1 so, dass sie die beiden Punkte e und f, in welchen die Polare von den Linien Ac_2 und $c_2 e$ geschnitten wird, harmonisch trennen. Von letzteren Linien ist Ac_2 die Verbindungslinie des Pols mit dem Endpunkte des zur Polaren parallelen Durchmessers und $c_2 e$ eine durch denselben Endpunkt zur Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkt der Ellipse gezogene Parallele. Es ist folglich

$$\overline{\varepsilon_1 d}^2 = \overline{\varepsilon_1 e} \times \overline{\varepsilon_1 f}$$

und kann auf bekannte Weise construirt werden. Die Verbindungslinie Od ist dann Tangente im Punkte d; aus diesem können die Punkte d_1, d_2, $d_3 \ldots d_7$, welche symmetrisch liegen, sowie ihre Tangenten unmittelbar erhalten werden.

In der Regel werden die 16 Punkte mit ihren Tangenten, die wir oben finden lernten, ausreichen, um die Centralellipse zu zeichnen, so dass von ihrer Construktion aus den gefundenen conjugirten Durchmessern, oder von der Auffindung der Hauptaxen, wie dies oben angedeutet worden ist, Umgang wird genommen werden können.

Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck ist, so erhält man auf obige Weise sogleich die Hauptaxen der Centralellipse. Diese letztere wird für ein Quadrat ein Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{\frac{1}{12} a^2}$ ist, wenn a die Seite des Quadrats bezeichnet. Der Kern wird in diesem Falle auch ein Quadrat, dessen Ecken auf den zu den Seiten parallelen Halbirungslinien des gegebenen liegen, und dessen Seitenlänge $\alpha = \sqrt{\frac{1}{18} a^2}$ wird.

§. 135. **Das Dreieck** (Fig. 86, Taf. XIX). — In der Centralellipse des Dreiecks ABC sind die Verbindungslinie einer Ecke A mit der Mitte D der gegenüberliegenden Seite und die Linie EF, welche durch den Schwerpunkt O parallel zu jener Seite BC gezogen ist, conjugirte Durchmesser. Für die Axe BC und für Entfernungen, die parallel zur Halbirungslinie AD gemessen sind, ist

$$\int_0^h a \frac{h-x}{h} x^2 \sin\varphi \, dx = \tfrac{1}{12} a h^3 \sin\varphi$$

das Trägheitsmoment des Dreiecks, wo a die Seite BC, h die Halbirungslinie AD und φ den Winkel bezeichnet, den beide miteinander bilden. Das Quadrat des Schwungradius k jenes Trägheitsmomentes ist folglich

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12} a h^3 \sin\varphi}{\frac{1}{2} a h \sin\varphi} = \tfrac{1}{6} h^2,$$

und für eine Axe EF, die parallel zu BC in der Entfernung $i = \frac{1}{3} h$ durch den Schwerpunkt gelegt ist, wird das Quadrat des Schwungradius

$$\mathfrak{a}^2 = k^2 - i^2 = \tfrac{1}{6} h^2 - \tfrac{1}{9} h^2 = \tfrac{1}{18} h^2.$$

Dieses $\mathfrak{a}$ ist nichts anderes als der in der Halbirungslinie AD liegende Halbdurchmesser und kann entweder berechnet und dann aufgetragen werden, indem man

$$\mathfrak{a} = 0{,}2357 h$$

macht, oder man kann $\mathfrak{a}$ aus der Formel

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\tfrac{1}{6} h \cdot \tfrac{1}{3} h}$$

construiren. Letzteres ist in der Figur mittelst des über OD beschriebenen Halbkreises geschehen. Man fand so die Punkte 1 und 2 der Centralellipse mit ihren zu BC parallelen Tangenten.

Um den zu 1 2 conjugirten Durchmesser seiner Grösse nach zu finden, ergibt sich aus Obigem unmittelbar, dass das Trägheitsmoment des Dreiecks ADC oder ADB für die Axe AD und für Entfernungen, die parallel zu BC gemessen werden,

$$= \tfrac{1}{12} h \left(\tfrac{1}{2} a\right)^3 \sin\varphi$$

ist. Das des ganzen Dreiecks ABC ist folglich unter denselben Voraussetzungen

$$= \tfrac{1}{6} h \left(\tfrac{1}{2} a\right)^3 \sin\varphi,$$

und das Quadrat des Schwungradius, welcher hier sofort der gesuchte Halbdurchmesser ist,

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\frac{1}{6} h \left(\frac{1}{2} a\right)^3 \sin\varphi}{\frac{1}{2} a h \sin\varphi} = \tfrac{1}{6} \left(\tfrac{1}{2} a\right)^2.$$

Construirt man $\mathfrak{b}$ nach der Formel

$$\mathfrak{b} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} a\right) \cdot \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2} a\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\overline{DC} \cdot \tfrac{1}{3}\overline{DC}},$$

was in der Figur mittelst des Halbkreises geschah, dessen Durchmesser die Hälfte von DC ist, so erhält man die Ellipsenpunkte 3 und 4 mit ihren zu AD parallelen Tangenten.

Acht weitere solche Punkte 5 bis 12 mit ihren Tangenten findet man, wenn man in ähnlicher Weise, wie vorhin von der Seite BC, von den Seiten AC und AB als Grundlinien des Dreiecks ABC ausgeht.

Um den Kern zu erhalten, denke man sich die neutrale Axe zunächst wieder in BC liegend. Dann liegt der Angriffspunkt α der Resultante aller Kräfte, die am Dreieck wirken und auf BC bezogen sind, in dem zu BC conjugirten Durchmesser AD der Centralellipse und zwar so, dass er in der letztern der Pol einer mit BC symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegenden Parallelen ist; oder seine Entfernung vom Schwerpunkt ist

$$\overline{O\alpha} = \frac{a^2}{\overline{OD}} = \frac{\frac{1}{18}h^2}{\frac{1}{3}h} = \frac{1}{6}h.$$

Dies ist unmittelbar aufzutragen. In gleicher Weise finden sich die Punkte β und γ bezüglich der Seiten AC und AB; und das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, das dem Dreieck ABC ähnlich ist, und dessen Dimensionen alle viermal so klein, als diejenigen des letztgenannten Dreiecks sind, ist der Kern desselben.

Die Seite $\beta\gamma$ dieses Kerns ist die Polare eines mit A zum Schwerpunkt symmetrisch gelegenen Punktes A′. Die Punkte δ und A′ müssen folglich durch die Ellipsenpunkte 1 und 2 harmonisch getrennt werden, oder es muss

$$\overline{O\delta} \, . \, \overline{OA'} = \overline{O1}^2$$

sein. Dies ist in der That erfüllt, da $\overline{O\delta} = \frac{1}{12}h$, $\overline{OA'} = \frac{2}{3}h$ und $\overline{O1}^2 = \frac{1}{18}h^2$ ist.

Zwei vom Punkte A′ an die Centralellipse gezogene Tangenten müssen dieselbe in Punkten berühren, in denen sie von der Polaren $\beta\gamma$ geschnitten wird. Hiernach kann man diese Punkte ganz in derselben Weise construiren, wie es im vorigen §. in einem ähnlichen Fall gezeigt wurde. Mittelst des Halbkreises über δe erhält man die Ellipsenpunkte 13 und 14 mit ihren durch A′ gehenden Tangenten, und in ganz gleicher Weise die vier anderen Punkte 15 bis 18 mit ihren Tangenten durch die Punkte B′, C′, die mit denen B und C symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegen.

Die oben erhaltenen 18 Punkte werden in der Regel hinreichen, die Centralellipse zu ziehen.

Für ein gleichschenkeliges Dreieck erhält man durch obiges Verfahren sofort die Hauptaxen der Centralellipse. Diese wird für ein gleichseitiges Dreieck ein Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{\frac{1}{24}a^2}$ ist, wenn a die Seite des Dreiecks bezeichnet.

§. 136. **Das Paralleltrapez** (Fig. 87, Taf. XX). — In der Centralellipse des Paralleltrapezes ABCD sind die Linie EF, welche die Mitten der parallelen Seiten verbindet, und die durch den Schwerpunkt gezogene Parallele GH zu diesen Seiten conjugirte Durchmesser. Ihre Längen finden sich in folgender Weise. Für die Momentenaxe AB und die Richtung EF, welche den Winkel φ mit ihr bildet, ist das Trägheitsmoment des Trapezes

$$\int_0^h \left[a - (a-b)\frac{x}{h}\right] x^2 \sin\varphi \, dx = \frac{1}{12}(a+3b)h^3 \sin\varphi.$$

wobei a und b die Längen der Parallelseiten AB und CD, und h die der Halbirungslinie EF bezeichnen. Der Schwungradius jenes Trägheitsmomentes ist, in's Quadrat erhoben,

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12}(a+3b)h^3 \sin\varphi}{\frac{1}{2}(a+b)h\sin\varphi} = \frac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2.$$

Hiernach folgt der Schwungradius $\mathfrak{a}$ für die Axe GH, welche, durch den Schwerpunkt gehend, die in der Richtung E F gemessene Entfernung $i = \frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$ von jener hat, aus der Relation:

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2 - \frac{1}{9}h^2\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^2$$
$$= \left[\frac{1}{18} + \frac{1}{9}\frac{ab}{(a+b)^2}\right]h^2.$$

Dieser Schwungradius $\mathfrak{a}$ ist die Hälfte des in EF liegenden Durchmessers der Centralellipse. Um ihn nach obiger Formel zu construiren, schreibe man

$$(3\mathfrak{a})^2 = \frac{1}{2}h^2 + \frac{ab}{(a+b)^2}h^2.$$

Beschreibt man über EF, als über einem Durchmesser, einen Halbkreis und errichtet auf EF in seinem Mittelpunkte O_1 und in dem Punkte K, wo sich die Diagonalen schneiden, Senkrechte O_1 J und KL bis zur Peripherie des Halbkreises, so ist

$$\overline{FJ}^2 = \frac{1}{2}h^2 \text{ und } \overline{KL}^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}h^2,$$

letzteres, weil $EK = \frac{b}{a+b}h$ und $KF = \frac{a}{a+b}h$. Trägt man also KL als JM auf JE auf, so ist

$$\overline{FM} = \sqrt{\frac{1}{2}h^2 + \frac{ab}{(a+b)^2}h^2} = 3\mathfrak{a},$$

und daher der gesuchte Halbdurchmesser der Centralellipse $O\mathfrak{a} = O\mathfrak{a}_1$ der dritte Theil von FM.

Man überzeugt sich leicht, dass dieselbe Construktion mit den entsprechenden Modificationen auch für das Parallelogramm und Dreieck angewendet werden kann.

Um den anderen Halbdurchmesser zu finden, berechnen wir das Trägheitsmoment des Trapezes für die Axe EF und die Richtung GH. Es wird

$$2\left[\int_0^{\frac{b}{2}} h y^2 dy + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} h\frac{a-2y}{a-b}y^2 dy\right]\sin\varphi$$
$$= \frac{h}{48}\left(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3\right)\sin\varphi.$$

Das Quadrat des Schwungradius desselben, welcher sogleich der gesuchte Halbdurchmesser selbst ist, wird demnach

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\frac{h}{48}(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)\sin\varphi}{\frac{1}{2}(a+b)h\sin\varphi}$$
$$= \frac{1}{24}\left(a^2+b^2\right) = \frac{1}{6}\left((\tfrac{1}{2}a)^2+(\tfrac{1}{2}b)^2\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{b}$ leicht zu construiren. In dem rechtwinkeligen Dreieck FAN, dessen Katheten $\frac{1}{2}a$

und $\frac{1}{2}$ b sind, ist die Hypotenuse $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2}$. Beschreibt man über ihrer Hälfte FU einen Halbkreis und macht $FW = \frac{1}{3}FN$, so ist die zu letzterem Abschnitt gehörige Sehne FV der gesuchte Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$, welcher als $O\mathfrak{b}$ und $O\mathfrak{b}_1$ aufgetragen worden ist.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ ist die Centralellipse bestimmt und kann auf gewöhnliche Weise gezeichnet werden. Der Kern ist aber zu construiren, ohne dass man die Centralellipse wirklich zieht, und zwar auf folgende Weise.

Wenn die neutrale Axe in AB liegt, so liegt der Angriffspunkt α der Resultante aller Kräfte, welche an dem Trapez wirken und auf sie bezogen sind, in dem zu AB conjugirten Durchmesser FE so, dass er der Pol einer mit AB parallelen und bezüglich des Schwerpunkts symmetrischen Linie ist, oder dass

$$\overline{O\alpha} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OF}}.$$

Es kann also $O\alpha$ leicht construirt werden und ist dies in der Figur mittelst des über OF beschriebenen Halbkreises geschehen. In ganz derselben Weise erhält man den Angriffspunkt γ der Resultante, wenn die neutrale Axe in CD liegt, mittelst eines über OE gezogenen Halbkreises.

Wenn die neutrale Axe, durch die Eckpunkte B oder C des Trapezes gehend, parallel zu EF ist, dann liegen die ihr entsprechenden Angriffspunkte der Resultante, ε und ζ in dem ihr conjugirten Durchmesser GH so, dass

$$\overline{O\varepsilon} = \frac{\mathfrak{b}^2}{\overline{OH'}} \text{ und } \overline{O\zeta} = \frac{\mathfrak{b}^2}{\overline{OH''}}.$$

Beide Strecken sind leicht zu construiren und ist dies in der Figur mit Hülfe der über OH′ und OH″ beschriebenen Halbkreise geschehen. Zwei mit ε und ζ symmetrisch liegende Punkte ε' und ζ' erhält man für den Fall, dass die neutrale Axe parallel zu EF durch den Eckpunkt A bezw. D des Trapezes gelegt wird.

Während die neutrale Axe, von der Lage AB in die BC übergehend, sich um den Punkt B dreht, bewegt sich der Angriffspunkt auf der Linie $\alpha\varepsilon$, und während des Ueberganges der neutralen Axe von BC nach CD, beschreibt der Angriffspunkt die Gerade $\zeta\gamma$. Diese Linien sind folglich Seiten des Kerns und ihr Schnittpunkt eine dritte Ecke β desselben. Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man die Seiten $\alpha\varepsilon'$ und $\zeta'\gamma$ und die vierte Ecke δ des Kerns, der hiemit vollständig bestimmt ist.

Die Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kerns sind in der Centralellipse die Polaren der Punkte B′, C′, D′ und A′, welche mit den Eckpunkten B, C, D, A des Trapezes symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegen. Die Durchschnittspunkte jener Seiten mit der Centralellipse sind folglich die Berührungspunkte der Tangenten, welche von B′, C′, D′, A′ aus an diese gezogen werden. Aber diese Berührungspunkte können hier nicht, wie in den beiden vorigen Paragraphen, direkt construirt werden, weil die zu den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ parallelen Durchmesser der Centralellipse nicht bekannt sind.

In der Figur wurde desshalb die Centralellipse lediglich aus ihren beiden conjugirten Durchmessern $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, construirt, und die Tangenten an sie aus den Punkten B′, C′, D′, A′ bis zu den Durchschnittspunkten der Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ mit ihr blos der Controle halber gezogen.

§. 137. Die Ellipse und der Kreis (Fig. 88, Taf. XX). — Aus den allgemeinen Betrachtungen im §. 125 folgt unmittelbar, dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser einer Ellipse ABA_1B_1 auch in der Centralellipse derselben conjugirt sind. Die halben Längen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ derjenigen Durchmesser der Centralellipse, welche mit den conjugirten Durchmessern $\overline{AA_1} = 2a$

und $\overline{BB_1} = 2b$ der gegebenen Ellipse zusammenfallen, finden sich aus diesen letzteren sehr einfach auf folgende Weise. Das Trägheitsmoment der Ellipse ABA_1B_1 für die Momentenaxe BB_1 und für die Richtung AA_1, die mit BB_1 den Winkel φ bildet, ist

$$\int_{-a}^{+a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sin\varphi\, x^2 dx = \tfrac{1}{4}a^3 b\pi\sin\varphi$$

und folglich das Quadrat des Schwungradius desselben oder der Halbaxe $\mathfrak{a}$ der Centralellipse, die auf OA liegt,

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\frac{1}{4}a^3 b\pi\sin\varphi}{ab\pi\sin\varphi} = \tfrac{1}{4}a^2,$$

also

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}a.$$

In gleicher Weise findet sich der andere Halbdurchmesser

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}b.$$

Die Centralellipse ist also der gegebenen ähnlich und mit ihr ähnlich gelegen, und ihre Dimensionen sind alle halb so gross, als die der letzteren Ellipse.

Eine ähnliche einfache Beziehung hat der Kern der gegebenen Ellipse zu dieser. Ist NN eine neutrale Axe, welche die Ellipse in C berührt, so ist ihr die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkte O in der gegebenen Ellipse sowohl, als in ihrer Centralellipse conjugirt. Der Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte also, welche an der Ellipsenfläche wirken und auf die neutrale Axe NN bezogen sind, liegt in jener Verbindungslinie, und zwar so, dass seine Entfernung vom Mittelpunkte O, nämlich

$$\overline{O\delta} = \frac{\overline{O\mathfrak{D}}^2}{\overline{OD}}$$

ist. Da aber $O\mathfrak{D}$ halb so gross als OD ist, so wird

$$\overline{O\delta} = \tfrac{1}{4}\overline{OD} = \tfrac{1}{2}\overline{O\mathfrak{D}}.$$

Der Kern ist folglich wieder eine der gegebenen ähnliche und mit ihr ähnlich liegende Ellipse, deren Dimensionen alle viertel so gross als die jener sind.

Die Centralellipse eines Kreises ist demnach ein mit ihm concentrischer Kreis, dessen Radius halb so gross ist, und der Kern ist wieder ein concentrischer Kreis, dessen Radius nur den vierten Theil des gegebenen beträgt.

Die Centralellipse eines Ringes, der von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen begrenzt wird, ist offenbar mit letzteren beiden concentrisch, denselben ähnlich und mit ihnen ähnlich gelegen. Bezeichnen a, b ein Paar conjugirter Halbdurchmesser der äusseren Ellipse, am und bm die mit ihnen zusammenfallenden der inneren, wo m eine absolute Zahl und zwar ein ächter Bruch ist, dann wird das Trägheitsmoment des Ringes für den Durchmesser b als Momentenaxe und für die Richtung des Durchmessers a, welcher mit jenem den Winkel φ bildet, gleich

$$\tfrac{1}{4}a^3 b\pi\sin\varphi\,(1-m^4)$$

und folglich das Quadrat des Schwungradius oder des Halbdurchmessers $\mathfrak{a}$ der Centralellipse, der mit a zusammenfällt,

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\frac{1}{4}a^3 b\pi\sin\varphi\,(1-m^4)}{ab\pi\sin\varphi\,(1-m^2)} = \tfrac{1}{4}a^2(1+m^2)$$

oder

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2} a \sqrt{1+m^2}.$$

Ebenso findet sich

$$= \tfrac{1}{2} b \sqrt{1+m^2}.$$

Für irgend eine Lage der neutralen Axe, in der sie die gegebene äussere Ellipse berührt, ist derjenige Radiusvektor ρ der Kern-Ellipse, welcher auf der Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkt der Ellipse liegt,

$$\rho = \frac{\mathfrak{r}^2}{r}$$

wenn $\mathfrak{r}$ und r die auf derselben Geraden liegenden Radien-Vektoren der Centalellipse und bezw. der gegebenen äusseren Ellipse bezeichnen.

Nun ist aber $\qquad \mathfrak{r} = \tfrac{1}{2} r \sqrt{1+m^2}$

folglich ist $\qquad \rho = \tfrac{1}{4} r \, (1+m^2)$,

wonach die Kernellipse leicht construirt werden kann.

Für Sektoren und Segmente von Ellipsen oder Kreisen wird die Rechnung complicirter. Man behandelt sie desshalb besser graphisch, indem man sie in dünne Lamellen zerschneidet und dann so verfährt, wie im §. 140 gezeigt werden wird.

§. 138. **Das Parabelsegment** (Fig. 89, Taf. XX). — Wir setzen voraus, dass das Parabelsegment ABC von einer beliebigen Sehne BC = 2h begrenzt werde, deren conjugirter Durchmesser AD = l sei. Dann ist leicht zu sehen, dass diese beiden Richtungen auch in der Centralellipse conjugirt sind, deren Mittelpunkt O bekanntlich AD im Verhältniss von 2 : 3 so theilt, dass das kleinere Stück zunächst an BC liegt. AD und EF, das parallel zu BC durch den Schwerpunkt O gezogen ist, sind folglich conjugirte Durchmesser der Centralellipse. Um die Länge desjenigen zu finden, der in AD liegt, berechnen wir zunächst das Trägheitsmoment des Segments in Bezug auf eine zu EF parallele Momentenaxe YY, welche die Parabel in A berührt, und für die Richtung AD, die mit EF den Winkel φ bildet. Es findet sich als

$$\int_0^l 2\sqrt{2px}\,\sin\varphi\, x^2 dx = \tfrac{4}{7}\sin\varphi\, l^3 h,$$

wo p den Parameter der Parabel bezeichnet.

Da nun die Fläche des Segmentes

$$\tfrac{4}{3}\sin\varphi\, l h$$

ist, so folgt der Schwungradius des obigen Trägheitsmomentes, in's Quadrat erhoben, als

$$k^2 = \tfrac{3}{7} l^2.$$

Das Quadrat des Schwungradius also für die zu YY parallele Axe EF, welche durch den Schwerpunkt geht, und deren Entfernung von YY $\tfrac{3}{5}l$ beträgt, ist

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{3}{7} l^2 - \tfrac{9}{25} l^2 = \tfrac{12}{175} l^2,$$

wo nun $\mathfrak{a}$ zugleich der auf AD liegende Halbdurchmesser der Centralellipse ist. Man wird denselben am einfachsten berechnen,

$$\mathfrak{a} = 0{,}261861,$$

und auftragen.

Um den anderen Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ zu erhalten, berechnet man das Trägheitsmoment des Segmentes für die Axe AD und die Richtung EF. Es findet sich als

$$\int_{-h}^{+h} (l - x)\, y^2 \sin\varphi \, dy = \int_{-h}^{+h} \left(l - \frac{y^2}{2p}\right) y^2 \sin\varphi \, dy = \tfrac{4}{15}\, l\, h^3 \sin\varphi.$$

Der Schwungradius desselben und daher der gesuchte Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ wird folglich, in's Quadrat erhoben,

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\frac{4}{15}\, l\, h^3 \sin\varphi}{\frac{4}{3}\, l\, h \sin\varphi} = \tfrac{1}{5} h^2.$$

Man wird auch hier am einfachsten $\mathfrak{b}$ aus

$$\mathfrak{b} = 0{,}44721 h$$

berechnen und auftragen.

So hat man zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse $\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{b}_1$ gefunden und kann diese somit construiren.

Um den Kern zu erhalten, lassen wir die neutrale Axe zuerst mit der Sehne BC zusammen fallen. Dann liegt der Angriffspunkt α der Resultante aller auf das Segment einwirkenden Kräfte, die auf jene Axe bezogen sind, in dem conjugirten Durchmesser DA der Centralellipse, und zwar so, dass

$$\overline{O\alpha} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OD}} = \frac{\frac{12}{175} l^2}{\frac{2}{5} l} = \tfrac{6}{35} l.$$

Während sich die neutrale Axe um B dreht, um von BC aus in die Lage der Tangente BG überzugehen, oder um C, um von derselben Anfangsstellung in die der Tangente CG zu kommen, beschreibt der Angriffspunkt gerade Linien, die von α ausgehen. Wir können dieselben leicht erhalten, wenn wir bemerken, dass bei jener Drehung um B oder C die neutrale Axe auch in diejenigen Stellungen kommt, wo sie parallel zu AD ist, wo also der entsprechende Angriffspunkt β oder γ auf dem conjugirten Durchmesser EF der Centralellipse und zwar so liegt, dass

$$\overline{O\beta} = \overline{O\gamma} = \frac{\mathfrak{b}^2}{h} = \frac{\frac{1}{5} h^2}{h} = \tfrac{1}{5} h$$

ist.

Während dann die neutrale Axe von CG nach GB übergeht, indem sie die Parabel fortwährend berührt, beschreibt der Angriffspunkt eine Ellipse, die von den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ berührt wird und leicht näher bestimmt werden kann. Bei jener Bewegung der neutralen Axe erhält dieselbe auch einmal die Lage, wo sie, parallel zur Sehne BC, die Parabel im Scheitel A berührt; für diese Lage befindet sich der Angriffspunkt δ auf dem conjugirten Durchmesser AD der Centralellipse und wird

$$\overline{O\delta} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OA}} = \frac{\frac{12}{175} l^2}{\frac{3}{5} l} = \tfrac{4}{35} l.$$

Dieser Punkt δ ist ein Punkt der Ellipse. Aber die Tangente CG kann auch dadurch in die Lage GB übergehen, dass sie sich um den Punkt G dreht. Dann bleibt der Angriffspunkt auf einer geraden Linie, auf derjenigen nämlich, welche in der Centralellipse die Polare eines anderen Punktes ist, der mit G symmetrisch zum Schwerpunkt liegt. Jene gerade Linie ist folglich parallel zu $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und durchschneidet $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ in einem solchen Punkte ε, für welchen

$$\overline{O\varepsilon} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OG}} = \frac{\frac{12}{175} l^2}{\frac{8}{5} l} = \frac{1\frac{1}{2}}{35} l$$

ist. Da aber unter all' den Lagen der neutralen Axe, bei denen sie durch den Punkt G hindurchgeht, auch die GC und GB vorkommen, in denen sie Tangente an die Parabel ist, so müssen die Angriffspunkte, welche letzteren entsprechen, sowohl auf der Ellipse, als auf jener Polaren, als auch auf den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ liegen, d. h. die Durchschnittspunkte ζ und η der Polaren mit den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ sind die Berührungspunkte der letzteren an der Kern-Ellipse. Folglich ist $\zeta\eta$ die Polare des Punktes α in letzterer Ellipse und daher die Richtungen $\alpha\delta$ und $\zeta\eta$ in dieser conjugirt, und zwar geht $\alpha\delta$ durch ihren Mittelpunkt. Dieser und damit die Länge des auf $\alpha\delta$ liegenden Durchmessers ist leicht zu erhalten. Da nämlich zwei unendlich ferne, zu AD parallele Gerade die Parabel auch berühren, so muss der Mittelpunkt O der Centralellipse in der Kernellipse liegen. O δ ist also der Durchmesser derselben und o, in seiner Mitte, der Mittelpunkt. In der That ist

$$\overline{Oo}^2 = \left(\tfrac{2}{35} l\right)^2 = \overline{\alpha o}.\overline{\varepsilon o} = \tfrac{8}{35} l \times \frac{\frac{1}{2}}{35} l = \left(\tfrac{2}{35} l\right)^2.$$

Hiernach ist es leicht, die Ellipse vollends zu construiren.

§. 139. Das Parabeldreieck (Fig. 89, Taf. XX). — So nennt man bekanntlich die Fläche zwischen den Tangenten CG und BG an die Parabel und dem Parabelbogen BAC. Es ist leicht zu sehen, dass die in der Parabel conjugirten Richtungen AD und BC auch in der Centralellipse des Parabeldreiecks conjugirt sind, dessen Schwerpunkt O' um $\frac{1}{5}$ AG oder, nach der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen, die wir hier beibehalten, um $\frac{1}{5}$ l von A entfernt ist.

Um die Längen der auf GA und E'F' liegenden conjugirten Durchmesser der Centralellipse zu erhalten, betrachten wir das Parabeldreieck als Differenz des geradlinigen Dreiecks GBC und des Segmentes ABC und erinnern uns, dass die Fläche des letzteren doppelt, also die des Dreiecks GBC dreimal so gross als diejenige des Parabeldreieckes ist, die wir mit F bezeichnen wollen. Dann ist für die Momentenaxe E''F'', welche durch den Schwerpunkt S des Dreiecks parallel zu BC gelegt ist, und für die Richtung AD das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{a}''$ des Dreiecks nach §. 135.

$$\mathfrak{a}''^2 = \tfrac{1}{18} (2 l)^2 = \tfrac{2}{9} l^2.$$

Für die zu E''F'' parallele Axe E'F', welche die Entfernung $O'S = \frac{1}{5} l + (l - \frac{2}{3} l) = \frac{8}{15} l$ von jener hat, wird der Schwungradius folglich

$$k''^2 = \tfrac{2}{9} l^2 + \left(\tfrac{8}{15} l\right)^2 = \tfrac{114}{225} l^2,$$

und daher ist das Trägheitsmoment des Dreiecks um jene Axe E'F'

$$\Theta'' = \tfrac{114}{225} l^2 . \ 3F = \tfrac{114}{75} l^2 F.$$

In gleicher Weise ist das Quadrat des Schwungradius des Segmentes ABC für die Axe EF und die Richtung AD nach vorigem §.

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{12}{175} l^2,$$

und folglich für die Axe $E'F'$, welche parallel mit jener ist und die Entfernung $\overline{O'O} = \frac{1}{5} l + \frac{3}{5} l = \frac{4}{5} l$ von ihr hat,

$$k^2 = \tfrac{12}{175} l^2 + (\tfrac{4}{5} l)^2 = \tfrac{124}{175} l^2.$$

Das Trägheitsmoment des Segmentes ist daher für dieselbe Axe und Richtung

$$\Theta = \tfrac{124}{175} l^2 . 2F = \tfrac{248}{175} l^2 F.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment des Parabeldreiecks GBC für die nämliche Axe $E'F'$

$$\Theta' = \Theta'' - \Theta = (\tfrac{114}{75} - \tfrac{248}{175}) l^2 F = \tfrac{18}{175} l^2 F.$$

Der Schwungradius dieses Trägheismomentes, in's Quadrat erhoben, ist also

$$\mathfrak{a}'^2 = \tfrac{18}{175} l^2 = (0{,}32071\, l)^2,$$

und hier bedeutet $\mathfrak{a}'$ nun sogleich den auf AG liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse.

Um den andern zu finden, hat man, für die Axe GD und die Richtung BC:
den Schwungradius des Dreiecks GBC

$$\mathfrak{b}''^2 = \tfrac{1}{6} h^2 \qquad (\S.\ 135),$$

den des Segmentes ABC

$$\mathfrak{b}^2 = \tfrac{1}{5} h^2,$$

folglich das Trägheitsmoment des Dreieckes GBC

$$\Theta_1'' = \tfrac{1}{6} h^2 . 3F = \tfrac{1}{2} h^2 F$$

und das des Segmentes

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{5} h^2 . 2F = \tfrac{2}{5} h^2 F,$$

und somit das des Parabeldreiecks für dieselbe Axe:

$$\Theta_1' = \Theta_1'' - \Theta_1 = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5}) h^2 F = \tfrac{1}{10} h^2 F.$$

Hieraus folgt das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{b}'$ oder des auf $E'F'$ liegenden Halbdurchmessers

$$\mathfrak{b}'^2 = \tfrac{1}{10} h^2 = (0{,}31623\, h)^2.$$

Aus den so gefundenen conjugirten Durchmessern kann die Centralellipse $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1'$ construirt werden.

Bei der Bestimmung des Kerns kommt der Parabelbogen nicht in Betracht, weil alle Tangenten an ihn innerhalb des Parabeldreiecks liegen. Der Kern wird folglich ein Dreieck, dessen Eckpunkte den drei Lagen BC, CG, GB der neutralen Axe entsprechen. Der Eckpunkt α', welcher der Lage BC zugehört, liegt auf dem derselben conjugirten Durchmesser $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'$ der Centralellipse so, dass

$$\overline{O'\alpha'} = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\overline{O'D}} = \frac{\frac{18}{175} l^2}{\frac{6}{5} l} = \tfrac{3}{35} l.$$

Auf den von diesem Eckpunkte ausgehenden Seiten des Kerns bewegt sich der Angriffspunkt, während die neutrale Axe von BC aus nach CG oder BG übergeht, indem sie sich um C oder B dreht. Dabei nimmt sie auch die Lagen ein, wo sie zu DG parallel ist. In diesem Falle liegen die entsprechenden Angriffspunkte β', γ' in dem conjugirten Durchmesser der Centralellipse so, dass

$$\overline{O'\beta'} = \overline{O'\gamma'} = \frac{\mathfrak{b}'^2}{h} = \frac{\frac{1}{10}h^2}{h} = \frac{1}{10}\,h$$

ist. Durch sie sind die Seiten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$ ihrer Richtung nach bestimmt.

Auf der dritten Seite des Dreiecks bewegt sich der Angriffspunkt, während sich die neutrale Axe um G dreht, um von CG nach GB überzugehen. Jene Seite ist folglich in der Centralellipse die Polare eines Punktes, der mit G symmetrisch gegen den Schwerpunkt O′ liegt; sie ist also parallel zum Durchmesser $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'_1$ und durchschneidet den andern in einem Punkte δ', der so liegt, dass

$$\overline{O'\delta'} = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\overline{O'G}} = \frac{\frac{18}{175}l^2}{\frac{4}{5}l^2} = \frac{9}{70}\,l$$

ist. Hiedurch ist nun der Kern vollständig bestimmt.

§. **140.** **Das Schienenprofil** (Fig. 63, Taf. X) ist, wenigstens zum Theil, ein „einfacher" Querschnitt im Sinne der Definition im §. 133. Zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse desselben sind nach §§. 124 und 125 die Symmetrieaxe und die zu ihr senkrechte Linie durch den Schwerpunkt, den wir wie im §. 79 gefunden hier voraussetzen. In den genannten Durchmessern liegen die Hauptaxen der Centralellipse, weil sie aufeinander senkrecht stehen. Um ihre Längen zu finden, hat man die Trägheitsmomente oder eigentlich die Schwungradien des Profils einmal für die eine, dann für die andere Hauptaxe als Momentenaxe zu suchen.

Behufs der Construktion der in der Symmetrieaxe YY liegenden Hauptaxe denken wir uns das Profil senkrecht auf jene erstere in Lamellen zerschnitten, welche als Trapeze oder Rechtecke betrachtet werden können. Wir benützen natürlich dieselben, welche schon zur Aufsuchung des Schwerpunktes S dienten. In ihren Schwerpunkten (1), (2) . . . (19) müssen wir uns Kräfte, gleich ihren Flächeninhalten, parallel zur Axe XX wirken denken und deren statische Momente in Bezug auf diese Axe finden. Jene Kräfte haben wir behufs Aufsuchung des Schwerpunktes S schon gefunden und zu dem Kräftepolygon 0 1 2 . . . 19 mit dem Pol C zusammengetragen. Das zugehörige, ebenfalls zu jenem Zwecke bereits construirte Seilpolygon 0 I II . . . XX gibt in den Abschnitten 0′1′, 1′2′, 2′3′ . . . 18′19′ seiner aufeinanderfolgenden Seiten mit der Axe XX die gesuchten statischen Momente, reducirt auf die Basis H, welche gleich der senkrechten Entfernung des Poles C von der zugehörigen Kräftelinie ist. Ihre Summe ist Null, weil sie auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe bezogen sind.

Diese statischen Momente hat man sich als Kräfte wieder parallel zur XX Axe in den Schwerpunkten der Momente der einzelnen Lamellen wirken zu denken. Letztere Schwerpunkte findet man bekanntlich mit Hülfe der Centralellipsen der Lamellen. In allen diesen Centralellipsen sind die Richtungen XX und YY conjugirt, und zwar liegen die Durchmesser von letzterer Richtung in der Axe YY selbst. In derselben liegen folglich auch die gesuchten Momenten-Schwerpunkte, und bezeichnet wie früher i die Entfernung des Schwerpunktes einer Lamelle von der Axe XX, $\mathfrak{a}$ den in YY liegenden halben Durchmesser ihrer Centralellipse und $\mathfrak{m}$ die Entfernung

ihres Momentenschwerpunktes vom Mittelpunkt der letzeren, so ist

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{i}}.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass $\mathfrak{m}$ nur für die Lamellen (10), (11) und (12), welche von bedeutender Grösse sind und nahe an der Axe XX liegen, einen merklichen Werth erhält. Für diese Lamellen haben wir die nach obiger Formel construirten Momentenschwerpunkte mit (10)′ (11)′, (12)′ bezeichnet, für alle anderen fallen sie mit den Kräfteschwerpunkten zusammen.

Da die Momente 0′1′, 1′2′, 2′3′ ... bereits zu einem Kräftepolygon vereinigt sind, so braucht man nur noch einen Pol C′ anzunehmen und hiezu zwischen den durch (1), (2) ... (9), (10)′, (11)′, (12)′, (13) ... (19) gezogenen Parallelen zu XX das Seilpolygon 0′I′ II′ ... XX′ zu zeichnen. Die äussersten Seiten des letzteren, welche parallel zu einander werden, schneiden auf der Axe XX das reducirte Trägheitsmoment 0″ 19″ ab. Dasselbe bezieht sich auf die schon erwähnte Basis H und auf die H′, gleich der senkrechten Entfernung des Poles C′ von seiner Kräftelinie. Nennen wir die Basis, auf welche die Flächen bezogen wurden, und die wir im §. 79 gleich 4 Centimeter nahmen, im Allgemeinen a, so ist a. H. H′. $\overline{0''19''}$ das Trägheitsmoment des Schienenprofils für die Axe XX und für senkrecht zu dieser gemessene Entfernungen. Dasselbe, durch die Kräftesumme, hier durch den Flächeninhalt a. $\overline{0\ 19}$ des Profils dividirt, gibt das Quadrat des Schwungradius oder der gesuchten Halbaxe

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{a.H.H'.\overline{0''19''}}{a.\overline{0\ 19}} = \frac{H.H'.\overline{0''19''}}{\overline{0\ 19}}.$$

Die Division wird auf graphischem Wege ausgeführt, indem man eine der Basen, H oder H′, gleich 0 19 wählt. Das ist in Fig. 63 nicht geschehen; es kann aber sehr leicht der Pol C′ im Kräftepolygon C′ 0′ 1′ 2′ ... 19′ durch einen anderen, C_1', ersetzt werden, dessen Entfernung $0'C_1'$ von der Kräftelinie gleich 0 19 ist. Das ihm entsprechende Seilpolygon braucht man nicht ganz zu zeichnen, da es sich blos um den Abschnitt seiner äussersten Seiten auf der Linie XX handelt. Es genügt, diese äussersten Seiten zu construiren, was mittelst einer einzigen mittleren, etwa der $X_1'XI_1'$ geschehen kann, und zwar in folgender Weise: Bei der Lage, welche wir den Polen C′ und C_1' gegeben haben, schneiden sich die gleichvielten Seiten der ihnen zugehörigen Seilpolygone in einer Vertikallinie, als welche wir sofort die Seite XIX′ XX′ nehmen können, wenn wir die beiden letzten Seiten der Seilpolygone zusammenfallen lassen. Die Seite $X_1'\,XI_1'$ ist dann parallel zum Strahl $10'\,C_1'$ und geht durch den Durchschnittspunkt β' der Seiten X′ XI′ und XIX′ XX′ des alten Polygons. Sie ist hiedurch bestimmt. Durch den Durchschnittspunkt α' der Seiten 0′I′ und X′XI′ geht, und zwar in horizontaler Richtung, die Resultante der Momente 0′1′, 1′2′... 9′10′. Dieselbe darf durch Aenderung des Poles im Kräftepolygon keine Aenderung erleiden und desshalb müssen sich die schon gefundene Seite $X_1'\,XI_1'$ und die erste Seite $0_1'\,I_1'$ des neuen Polygons auf der durch α' gelegten Horizontalen, in α_1', schneiden. Die letztere Seite ist hiedurch bestimmt, da ihre Richtung bekannt ist, und damit ist der dem neuen Pol C_1' entsprechende Abschnitt $0_1''\,19''$ der äussersten Seilpolygonseiten auf der Axe XX gefunden.

Die gleiche Construktion hat man natürlich zu machen, wenn das Trägheitsmoment des Querschnitts durch eine andere Linie zu dividiren ist, durch die Entfernung der äussersten gezogenen oder gedrückten Fasern z. B., wenn aus dem Trägheitsmoment das in der Biegungstheorie so genannte Biegungsmoment gefunden werden will.

Der gesuchte Schwungradius oder die in YY liegende Halbaxe ist nun $\sqrt{H \times \overline{0_1''\,19''}}$

und kann auf bekannte Weise construirt werden. Sie wurde als $\mathfrak{S}\mathfrak{a} = \mathfrak{S}\mathfrak{a}'$ in die Figur eingetragen.

Um die andere auf XX liegende Halbaxe der Centralellipse zu finden, hat man das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Axe YY und für senkrecht gemessene Entfernungen zu suchen. Zu diesem Behufe kann man das Profil in Lamellen parallel zu dieser Axe zerlegen und ganz so wie vorhin verfahren. Aber diese Zerlegung hat bei Querschnitten von der Art wie der in Rede stehende einige Schwierigkeiten, wenn es auf möglichste Genauigkeit abgesehen ist. Man wird desshalb lieber die schon gemachte Zerlegung in Lamellen parallel zur Axe XX beibehalten, und in der That ist dies, wie man leicht sieht, möglich. Denkt man sich die zur Axe XX parallelen Durchmesser der Centralellipsen dieser letzteren Lamellen gefunden, und in den Endpunkten derselben parallel zur YY Axe Kräfte wirken, gleich den Flächeninhalten der Lamellen, so ist nach §. 128 das Trägheitsmoment dieser Kräfte bezüglich der Axe YY gleich dem gesuchten Trägheitsmoment des Profils. Jene Durchmesser finden sich nach §. 136 oder einfacher nach §. 134, wenn man die Lamellen als Rechtecke betrachten darf, deren Breite gleich der mittleren Parallelen des Trapezes ist; und das ist bei allen der Fall, mit Ausnahme der Lamelle (15). Wir haben die Durchmesser berechnet, die Hälften nach links aufgetragen, und ihre Enden mit $(1)''$, $(2)''$, $(3)'' \ldots (19)''$ bezeichnet. Zwischen den durch sie gezogenen Parallelen wurde dann das Seilpolygon $0'' I'' II'' \ldots XX''$ gezeichnet, dessen Seiten senkrecht auf den Strahlen des Kräftepolygons $C\ 0\ 1\ 2 \ldots 19$ stehen und auf YY die statischen Momente $0'''1'''$, $1'''2'''$, $2'''3''' \ldots$ abschneiden, die sofort zum Kräftepolygon $0'''\ 1'''\ 2''' \ldots 19'''$ vereiniget sind. Nimmt man für letzteres den Pol C''' in der Entfernung H''' von der Kräftelinie an, und construirt man daraus zwischen denselben Parallelen wie vorhin das Seilpolygon $0''' I''' II''' \ldots XX'''$, so schneiden dessen äusserste Seiten auf YY das gesuchte reducirte Trägheitsmoment $0^{IV} 19^{IV}$ ab. Dasselbe bezieht sich auf die Basen H und H''' und ist daher eigentlich gleich $a.H.H''' \times \overline{0^{IV}\ 19^{IV}}$. Mit $a.\overline{0\ 19}$, dem Flächeninhalt des Profils, dividirt gibt es das Quadrat der gesuchten Halbaxe. Um diese Division leicht ausführen zu können, haben wir diesmal H''' halb so gross als $0\ 19$ gemacht, und daher ist die gesuchte Halbaxe

$$\mathfrak{S}\mathfrak{b} = \mathfrak{S}\mathfrak{b}' = \sqrt{\tfrac{1}{2}.\overline{0^{IV}19^{IV}}.H} = \sqrt{\overline{0^{IV}\ 19^{IV}_{1}}.H}$$

und kann auf bekannte Weise construirt werden.

Mittelst der beiden Hauptaxen kann man die Centralellipse auf gewöhnliche Weise zeichnen. Die Construktion des Kerns ist sehr einfach. Indem man die neutrale Axe aus der Lage MM_1 am Fusse des Profils, wo ihr der Angriffspunkt γ der Resultante in bekannter Weise entspricht, in die Lage $M_1 M_2$ mit dem zugehörigen Angriffspunkt δ überführt, muss man sie um M_1 drehen, wesshalb der Angriffspunkt die gerade Linie $\gamma\delta$ durchläuft. Während dann die neutrale Axe, das Profil fortwährend berührend, in die Stellung $M_3 M_4$ und von da in diejenige übergeht, wo sie, horizontal liegend, den Kopf des Profils berührt, und wo ihr der Angriffspunkt ε entspricht, beschreibt der letztere eine krumme Linie $\delta\varepsilon$, von der eine genügende Anzahl von Punkten in bekannter Weise construirt werden kann. Die andere Seite des Kerns ist natürlich symmetrisch zu der so gezeichneten bezüglich der Axe YY.

Da es sich bei obiger Construktion immer blos um die Auffindung von Durchmessern der Centralellipse handelt, die den Momentenaxen MM_1, $M_1 M_2$ etc. conjugirt sind, also um Tangenten, parallel zu letzteren an die Centralellipse, so braucht man letztere nicht gezeichnet zu haben, um den Kern finden zu können; jene Tangenten mit ihren Berührungspunkten sind schon, in bekannter Weise, aus den Hauptaxen allein zu erhalten.

§. 141. **Das Winkeleisenprofil** (Fig. 64, Taf. XI), dessen Schwerpunkt wir schon im §. 80 bestimmt haben, wählen wir als Beispiel für einen ganz unregelmässigen Querschnitt, welcher die Kennzeichen der im §. 133 definirten „Einfachheit" nicht mehr besitzt, der aber in eine kleinere Anzahl von Theilen zerlegbar ist, deren Centralellipsen gefunden werden können. Wir behalten dieselbe Zerlegung bei, wie die im §. 80 gebrauchte, und setzen die Schwerpunkte (1), (2), (3)...(6) der Theile, sowie die Centralellipsen derselben als bekannt voraus. Ebenso die auf die Basis a = 2 Centimeter reducirten Flächeninhalte der Stücke, welche schon behufs der Bestimmung des Schwerpunkts S zum Kräftepolygon C 0 1 2...6 zusammengetragen worden sind, aus dem das Seilpolygon 0 I II...VII construirt wurde. An dieses letztere knüpfen wir nun die weitere Construktion behufs Aufsuchung der Centralellipse an, indem wir die horizontale Axe XX durch den Schwerpunkt als den einen, willkürlich zu wählenden Durchmesser der Centralellipse nehmen und (nach dem Satze im §. 118) den dazu conjugirten suchen. Die Abschnitte 0'1', 1'2'...5'6' der aufeinanderfolgenden Seiten jenes Seilpolygons auf der Axe XX sind die statischen Momente der in den Punkten (1), (2)...(6) als Kräfte wirkenden Flächeninhalte der Stücke. Diese Momente hat man sich nun als Kräfte in den Momentenschwerpunkten der Stücke wirken zu denken und ihren Gesammtschwerpunkt zu suchen. Jene Momentenschwerpunkte der Stücke sind aber in deren Centralellipsen die Pole einer Linie, die mit der Axe XX parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen die betreffenden Mittelpunkte liegt; sie finden sich also auf den zu XX conjugirten Durchmessern der Centralellipsen in einer Entfernung

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{i}}$$

von deren Mittelpunkten, wenn $\mathfrak{a}$ die halbe Länge des Durchmessers und i die auf ihm gemessene Entfernung des Mittelpunktes der Centralellipse von der Axe XX bezeichnet. Man findet leicht, dass jenes $\mathfrak{m}$ nur für die Stücke 2, 3 und 5 einen merklichen Werth erhält; für diese Stücke wurden die Momentenschwerpunkte mit (2)' (3)' und (5)' bezeichnet.

Um den Gesammtschwerpunkt der Momente zu finden, hat man diese nach zwei Richtungen hin, wir wählen die horizontale und vertikale, in den betreffenden Schwerpunkten anzubringen und die zugehörigen Seilpolygone zu zeichnen. Dieselben können beide aus dem Kräftepolygon 0' 1' 2'... 6' mit dem vorläufig willkürlichen Pole C' construirt werden. Die Seiten des einen sind parallel, die des anderen senkrecht zu den Strahlen des Kräftepolygons. Wir haben sie in der Figur mit 0'' I'' II''...VII'' und 0''' I''' II'''...VII''' bezeichnet. Ihre äussersten Seiten laufen parallel zu einander, wie natürlich, da die Momentensumme in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe XX Null ist, das Kräftepolygon 0' 1' 2'...6' sich schliesst. Der Gesammt-Momenten-Schwerpunkt liegt also in unendlicher Entfernung, und wir müssen die Momente in zwei Gruppen theilen und deren Schwerpunkte suchen, um den zu XX conjugirten Durchmesser zu finden. In die erste Gruppe nimmt man wohl am besten die Momente 1', 2', 3' und 4', in die zweite die 5' und 6'. Der Schwerpunkt S' der ersten Gruppe ist der Schnittpunkt der horizontalen und vertikalen Linie, welche durch die Schnitte β'' und β''' der Seilpolygonseiten 0'' I'' und IV'' V'', bezw. 0''' I''' und IV''' V''' gezogen werden; und ähnlich findet sich der Schwerpunkt S'' der zweiten Gruppe. Die zu XX conjugirte Axe YY der Centralellipse geht dann parallel zur Verbindungslinie S' S'' durch den Schwerpunkt S.

Um die Längen der in XX und YY liegenden conjugirten Durchmesser zu finden, müssen die Schwungradien der Trägheitsmomente des Profils bezüglich jener Axen construirt werden. Dies ist für die erste Axe durch die vorausgehende Construktion fast schon geschehen. Der

Abschnitt $0''6''$ zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons $0''$ I'' $II'' \dots VII''$ auf der Axe XX ist das auf die Basen $0C$ und $0'C'$ reducirte Trägheitsmoment, bezogen auf diese Axe. Dasselbe ist also gleich

$$a.H.H'.\overline{0''6''},$$

wenn a die Flächenbasis, gleich 2 Centimeter, und H und H' jene Momentenbasen bezeichnen. Das Quadrat des Schwungradius wird folglich, senkrecht gemessene Entfernungen vorausgesetzt,

$$\frac{a.H.H'.\overline{0''6''}}{a.\overline{0\,6}} = \frac{H.H'.\overline{0''6''}}{\overline{0\,6}}.$$

Um diese Division leicht ausführen zu können, haben wir H' gleich der Hälfte der Kräftesumme 0 6 gewählt. Wird folglich $0''\,6''$ in $0_1''$ halbirt, so ist der gesuchte Schwungradius, immer senkrecht gemessene Entfernungen vorausgesetzt,

$$k = \sqrt{H.\overline{0_1''6''}}$$

und leicht zu construiren. Trägt man ihn zu beiden Seiten der Axe XX senkrecht auf diese auf, so schneiden die durch die Endpunkte gezogenen Parallelen zu XX die Endpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ des auf YY liegenden conjugirten Durchmessers ab.

Um die Länge des in XX liegenden conjugirten Durchmessers der Centralellipse zu finden, wenden wir das im §. 128 angegebene Verfahren an, indem wir das Trägheitsmoment und daraus den Schwungradius des Profils für die Axe YY suchen. Wir sollten zu diesem Behufe die zu YY conjugirten Durchmesser der Centralellipsen der einzelnen Stücke zeichnen, sie verlängern, bis sie die Axe YY treffen, und für die Schnittpunkte als Mittelpunkte die Trägheitsellipsen construiren, oder wenigstens deren zu YY conjugirte Durchmesser, die mit denen der Centralellipsen in einer und derselben geraden Linie liegen. Bezeichnen a und $\mathfrak{a}$ diese halben Durchmesser für die Trägheits- und bezw. Centralellipse und i die in ihrer Richtung gemessene Entfernung des Mittelpunktes der letzteren von YY, so ist

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2$$

und folglich als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten $\mathfrak{a}$ und i sind, leicht zu construiren. In den Endpunkten dieser Halbdurchmesser a, von denen jeder beliebig auf die eine oder andere Seite der Axe YY getragen werden kann, müssten dann die Kräftesummen, hier die Flächeninhalte der Stücke, parallel zu YY wirkend gedacht werden, worauf in bekannter Weise das Trägheitsmoment derselben zu construiren wäre. Da es sich aber hiebei blos um die Parallelen zu YY handelt, zwischen denen die beiden, zu jenem Zwecke nothwendigen Seilpolygone gezeichnet werden müssen, so wird man einfacher so verfahren, dass man an jede der Centralellipsen eine zur Axe YY parallele Tangente und durch ihren Mittelpunkt eine Senkrechte zu derselben Axe legt. Bezeichnen $\mathfrak{a}'$ und i' die auf letzterer gemessenen Entfernungen des Mittelpunkts der Centralellipse von jener Tangente und bezw. von der Axe YY, dann a' die auf derselben Linie gemessene Entfernung der obigen Parallelen zu YY von letzterer Axe, so ist ebenfalls

$$a'^2 = \mathfrak{a}'^2 + i'^2$$

und daher durch Construktion eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den Katheten $\mathfrak{a}'$ und i' zu erhalten. Wir haben in Figur 64 diese a' auf die Senkrechten zu YY aufgetragen, und zwar auf die eine oder andere Seite dieser Axe, wie wir es eben betreffs der Deutlichkeit der zu construirenden Seilpolygone für besser hielten. Die Endpunkte der aufgetragenen Stücke haben wir mit $(1)''$, $(2)'' \dots (6)''$ bezeichnet. Beim ersten Stück wird wegen der geringen Grösse von $\mathfrak{a}'$

gegenüber derjenigen von i' der Werth a' fast gleich i' und fällt also $(1)''$, wenn wir a' auf dieselbe Seite von YY auftragen, auf welcher (1) liegt, mit letzterem Punkt zusammen.

Zwischen den durch die letzterhaltenen Punkte zu YY gezogenen Parallelen wurde hierauf das Seilpolygon $0^4\, I^4\, II^4 \ldots VII^4$ aus dem in YY liegenden Kräftepolygon $0_1\, 1_1\, 2_1 \ldots 6_1$ mit dem Pol C_1, das dem $C\ 0\ 1\ 2\ 3 \ldots 6$ ganz gleich ist, construirt. Die Abschnitte $0'''\, 1'''$, $1'''\, 2''' \ldots$ der aufeinanderfolgenden Seiten jenes Seilpolygons auf der Axe YY sind die reducirten statischen Momente bezüglich dieser Axe und sogleich zum Kräftepolygon $0'''\, 1'''\, 2''' \ldots 6'''$ zusammengetragen. Für den Pol C''' desselben, dessen Entfernung H''' von der Kräftelinie wieder gleich der halben Kräftesumme, hier also gleich der Hälfte von $0\ 6$ im ersten Kräftepolygon, genommen wurde, construirten wir dann das Seilpolygon $0^5\, I^5\, II^5 \ldots VII^5$ zwischen denselben Parallelen wie das vorige. Der Abschnitt $0^{IV}\, 6^{IV}$ zwischen den äussersten Seiten desselben auf der Axe YY ist das gesuchte Trägheitsmoment, reducirt auf die Flächenbasis a und die Momentenbasen H und H'''. Es ist also gleich $a . H . H''' . \overline{0^{IV}\, 6^{IV}}$ und folglich das Quadrat des Schwungradius für senkrecht zu YY gemessene Entfernungen:

$$\frac{a . H . H''' . \overline{0^{VI}\, 6^{VI}}}{a . \overline{0\, 6}} = \tfrac{1}{2} H . \overline{0^{IV}\, 6^{IV}} = H . \overline{0_1^{IV}\, 6^{IV}},$$

wenn 0_1^{IV} in der Mitte von $0^{IV}\, 6^{IV}$ liegt. Der Schwungradius selbst ist folglich

$$k' = \sqrt{H . \overline{0_1^{IV}\, 6^{IV}}}$$

und leicht zu construiren. Zwei Parallele zu YY auf beiden Seiten dieser Axe, deren senkrechte Entfernungen von ihr gleich k' sind, schneiden auf XX die Enden des gesuchten Durchmessers $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'$ ab.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser ist die Centralellipse vollständig bestimmt und kann auf gewöhnliche Weise gezeichnet werden. Anstatt des eben gezeigten Verfahrens, sie zu finden, hätte man auch den Weg einschlagen können, dass man auf ganz dieselbe Weise, wie es zuletzt für die Axe YY geschehen ist, die Trägheitsmomente und Schwungradien für drei beliebige Axen, die durch den Schwerpunkt S gehen, gesucht hätte. Durch die hiedurch gefundenen 3 Paar parallelen Tangenten ist die Centralellipse auch bestimmt. Wenn man dabei die drei Axen, von denen die eine wieder XX sein möge, unter denselben Winkeln gegeneinander zeichnet, welche die Seiten des Dreiecks miteinander bilden, mit dem man arbeitet, so braucht das Kräftepolygon aus den Flächeninhalten der sechs Stücke nicht dreimal gezeichnet zu werden, sondern man kann die drei zugehörigen Seilpolygone aus dem einen Kräftepolygon $C\ 0\ 1\ 2 \ldots 6$ construiren. Aber das oben gezeigte Verfahren ist wenigstens nicht umständlicher als dieses letztere und hat den Vortheil, dass man unmittelbar zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse erhält.

Aus diesen kann man die Hauptaxen auf bekannte Weise finden und mittelst derselben, behufs Construktion des Kerns, Tangenten an die Ellipse, parallel zu gegebenen Richtungen, und deren Berührungspunkte construiren, ohne dass man die Ellipse selbst gezeichnet hat. Dieser Kern wird, wie leicht ersichtlich, ein Sechseck $\delta \varepsilon \zeta \vartheta \kappa \lambda$, dessen Ecken den Stellungen ab, bc, cd, de, ef und fa der neutralen Axe in bekannter Weise entsprechen.

Centralellipsoid und Kern einiger einfacher Körper.

§. **142. Das Tetraëder** (Fig. 90, Taf. XX). — Denkt man sich das Tetraëder ABCD durch Ebenen parallel zu einer Seitenfläche ABC in so dünne Platten zerschnitten, dass man dieselben als materielle ebene Figuren betrachten kann, so folgt aus dem zweiten Satze des §. 124 sofort, dass in seinem Centralellipsoid die Verbindungslinie DS der Spitze, welche jener Seitenfläche gegenüberliegt, mit dem Schwerpunkt der letzteren der Stellung jener Parallelebenen conjugirt ist. Noch mehr: da alle jene Platten ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke sind und daher ähnliche und ähnlich liegende Centralellipsen haben, so folgt aus dem vierten Satze des §. 124, dass das Centralellipsoid von einer durch seinen Mittelpunkt S_0 gelegten, zur Seitenfläche ABC parallelen Ebene nach einer Ellipse geschnitten wird, die jenen ähnlich ist und ähnlich mit ihnen liegt. Desshalb sind zwei conjugirte Durchmesser der letzteren Ellipse, ihrer Richtung nach, sogleich gefunden. Ist $A_0 B_0 C_0$ das Dreieck, in welchem die durch den Schwerpunkt S_0 des Tetraëders gelegte Parallelebene zu ABC das Tetraëder schneidet, so sind die Halbirungslinie $C_0 E_0$ und die durch S_0 gelegte Parallele $F_0 G_0$ zu $A_0 B_0$ in der Centralellipse des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ conjugirt und folglich auch in obiger Schnittellipse des Centralellipsoids. DS, $C_0 E_0$ und $F_0 G_0$ sind somit drei conjugirte Durchmesser des letzteren, der Richtung nach. Ihre Grösse ist leicht zu finden.

Bezeichnet g den Flächeninhalt der Seitenfläche ABC, h die Linie DS, so ist die Grösse irgend eines zu ABC parallelen Schnittes des Tetraëders, dessen Entfernung von ABC, auf h gemessen, mit x bezeichnet wird,

$$g_x = g \frac{(h-x)^2}{h^2},$$

und daher ist das Quadrat des Schwungradius des Tetraëders für ABC als Momentenebene und für die Richtung DS

$$k^2 = \frac{\int_0^h \frac{g}{h^2}(h-x)^2 x^2 \, dx}{\int_0^h \frac{g}{h^2}(h-x)^2 \, dx} = \tfrac{1}{10} h^2.$$

Daraus folgt für das Quadrat desjenigen Halbdurchmessers $\mathfrak{b}$ des Centralellipsoids, der auf DS liegt,

$$\mathfrak{b}^2 = k^2 - i^2 = \tfrac{1}{10} h^2 - \tfrac{1}{16} h^2 = \tfrac{3}{80} h^2 = (0{,}1937\, h)^2.$$

Aus obiger Entwicklung folgt zugleich das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{a}$ des Tetraëders für die Momentenebene DCE und für die Richtung AB oder $F_0 G_0$:

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{1}{10} (\tfrac{1}{2} a)^2 = \tfrac{1}{40} a^2 = (0{,}1581\, a)^2,$$

wo a die Länge der Kante AB bezeichnet. Jenes $\mathfrak{a}$ ist zugleich der auf $F_0 G_0$ liegende Halbdurchmesser. Auf $A_0 B_0 = a_0 = \frac{3}{4} a$ bezogen, wird

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{2}{45} a_0^2;$$

$\mathfrak{a}$ verhält sich also zu dem auf $F_0 G_0$ liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$, dessen Quadrat nach §. 135 gleich $\frac{1}{24} a_0^2$ ist, wie $\sqrt{16} : \sqrt{15}$. Dasselbe Verhältniss müssen nach Obigem die beiden auf $C_0 E_0$ liegenden Durchmesser des Centralellipsoids des Tetraëders und der Centralellipse des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ zu einander haben, und da das Quadrat

des letzteren nach §. 135 gleich $\frac{1}{18} h_0'^2$ ist, mit h_0' die Halbirungslinie $C_0 E_0$ bezeichnet, so ist der dritte Halbdurchmesser des Ellipsoids, ins Quadrat erhoben,

$$c^2 = \tfrac{1}{18} h_0'^2 \cdot \tfrac{16}{15} = \tfrac{8}{135} h_0'^2,$$

oder auf $CE = h' = \frac{4}{3} h_0'$ bezogen,

$$c^2 = \tfrac{1}{30} h'^2 = (0{,}1826\, h')^2.$$

Bekanntlich kann man das Tetraëder noch auf andere Weise in Parallelschnitte zerlegen, deren Schwerpunkte alle in einer geraden Linie liegen, durch Ebenen nämlich, welche parallel zu zwei Gegenseiten $AB = a$ und $CD = b$ sind (s. §. 86). Jener geometrische Ort für die Schwerpunkte der Schnitte ist die Verbindungslinie der Mitten J und E der Gegenseiten und daher ist JE in dem Centralellipsoid des Tetraëders der Stellung jener Parallelebenen conjugirt. Noch mehr: die Parallelschnitte sind Parallelogramme, deren Seiten sämmtlich zu AB bezw. CD parallel sind. Die Centralellipsen derselben haben folglich alle ein Paar conjugirter Durchmesser, deren Richtungen mit denen der Gegenseiten AB und CD übereinstimmen. Desshalb sind die drei durch den Schwerpunkt S_0 des Tetraëders gezogenen Geraden: JE, $F_0 G_0$ und $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1'$, von welchen letztere parallel zu CD ist, conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids desselben, der Richtung nach. Auch ihre Länge ist leicht gefunden. Die Flächeninhalte der Parallelogramme, in welchen die zu AB und CD parallelen Ebenen das Tetraëder schneiden, sind nach §. 86 den Quadraten derjenigen Ordinaten eines über der Kante BD beschriebenen Halbkreises proportional, deren Fusspunkte die Schnittpunkte der Parallelebenen und der Kante BD sind. Jene Flächeninhalte sind also auch den Produkten aus den beiden Abschnitten, in welche obige Schnittpunkte die Kante BD theilen, proportional und letztere Abschnitte denjenigen, welche die Parallelebenen auf JE machen. Bezeichnet also z die Entfernungen der Schnittpunkte der Parallelebenen auf JE von der Mitte S_0 und c die Länge von JE selber, so sind jene Parallelogramme proportional den Produkten $(\frac{1}{2} c - z)(\frac{1}{2} c + z)$ oder proportional mit $(\frac{1}{4} c^2 - z^2)$. Für gleiche z sind folglich jene Parallelogramme zu beiden Seiten von S_0 gleichgross und der Schwungradius des Trägheitsmomentes des Tetraëders für die zu jenen Schnittebenen parallele, durch S_0 gelegte Momentenebene und für die Richtung JE findet sich aus:

$$\mathfrak{c}_1^2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}c} (\frac{1}{4} c^2 - z^2) z^2 \, dz}{\int_0^{\frac{1}{2}c} (\frac{1}{4} c^2 - z^2) \, dz} = \tfrac{1}{20} c^2 = (0{,}2236\, c)^2.$$

Dieses $\mathfrak{c}_1$ ist zugleich der auf JE liegende Halbdurchmesser des Centralellipsoids.

Der auf $F_0 G_0$ liegende Halbdurchmesser $\mathfrak{a}_1$ wird erhalten, wenn man das Tetraëder durch Ebenen parallel zu CD und JE in dreieckige Platten zerschneidet, deren Grösse auf jeder Seite der Ebene CDE proportional den Quadraten der Entfernungen der Schnittebenen von den Endpunkten A, bezw. B sind. Messen wir diese Entfernungen in der Richtung von AB oder $F_0 G_0$ und nennen wir sie y, so ist

$$\mathfrak{a}_1^2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2} a - y)^2 y^2 \, dy}{\int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2} a - y)^2 \, dy} = \tfrac{1}{40} a^2 = (0{,}1581\, a)^2,$$

also übereinstimmend mit dem vorhin schon gefundenen Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$, der ebenfalls in $F_0 G_0$ liegt.

Auf dieselbe Weise, wie soeben $\mathfrak{a}_1$, findet man für den Halbdurchmesser $\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1'$

$$\mathfrak{b}_1^2 = \tfrac{1}{40}\,\mathfrak{b}^2 = (0{,}1581\,\mathfrak{b})^2.$$

In der Ebene DCE liegen die zwei Paar conjugirter Durchmesser $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$. Da dieselben auch der Schnittellipse jener Ebene mit dem Ellipsoid angehören, so muss die Relation zwischen ihnen bestehen:

$$\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2,$$

und in der That überzeugt man sich leicht, dass dies der Fall ist, wenn man nur die Längen c und h durch b und h′ ausdrückt.

Der Kern des Tetraëders ist, wie sofort ersichtlich, wieder ein Tetraëder, dessen Ecken auf den Verbindungslinien des Schwerpunkts S_0 mit den Ecken des gegebenen Tetraëders liegen. Bezeichnet allgemein h die Verbindungslinie einer der Ecken A, B, C oder D des Tetraëders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche, ferner $i = \frac{1}{4}h$ die Entfernung dieses letzteren Punktes vom Schwerpunkte S_0 und endlich $\mathfrak{b}$ den auf h liegenden Halbdurchmesser des Centralellipsoids, so ist die Entfernung der in h liegenden Ecke des Kern-Tetraëders von S_0 gleich

$$\frac{\mathfrak{b}^2}{i} = \frac{\frac{3}{80}h^2}{\frac{1}{4}h} = \tfrac{3}{20}\,h.$$

Auf die Entfernung $s = \frac{3}{4}h$ des Schwerpunktes S_0 von der betreffenden Tetraëder-Ecke bezogen, wird letzterer Ausdruck gleich $\frac{1}{5}s$. Daraus folgt, dass der Kern $\alpha\beta\gamma\delta$ ein mit dem gegebenen ähnliches und ähnlich liegendes Tetraëder ist, dessen Dimensionen fünfmal so klein sind, als die des gegebenen. Seine Seitenflächen sind parallel den Seitenflächen des letzteren und im Centralellipsoid die Polarebenen von Punkten, die mit den betreffenden Ecken des gegebenen Tetraëders symmetrisch zum Schwerpunkt desselben liegen. Auf ihnen bewegt sich der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte, wenn sich die Neutralebene um jene Tetraëder-Ecken dreht. Ebenso sind die Kanten des Kerns denen des gegebenen Tetraëders parallel. Die Kante $\gamma\delta$ z. B. ist im Centralellipsoid die Polare einer Linie, welche mit der Gegenkante AB parallel und symmetrisch zum Schwerpunkt S_0 liegt. Auf ihr bewegt sich der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte, während sich die Neutralebene um die Kante AB dreht. Dies geht auch direkt aus dem oben gefundenen Werth für den Halbdurchmesser $\mathfrak{c}_1$ hervor, den wir bei der zweiten Zerlegungsart des Tetraëders erhielten.

§. 143. Prisma und Cylinder mit parallelen Endflächen. — Denkt man sich ein Prisma oder einen Cylinder der bezeichneten Art durch Ebenen parallel zu den Endflächen in dünne Platten zerschnitten, so sieht man sogleich, dass in seinem Centralellipsoid die Stellung jener Parallelebenen und die zu den Seitenkanten parallele Verbindungslinie der Schwerpunkte der Endflächen, die Schwerpunktsaxe, conjugirt sind. Alle Schnittfiguren haben congruente und ähnlich liegende Centralellipsen, woraus folgt, dass die Ellipse, in welcher die durch den Schwerpunkt des Prismas oder Cylinders gehende Parallelebene das Centralellipsoid schneidet, dieselbe Grösse, Gestalt und Lage haben muss. Denn das Trägheitsmoment des Prismas (Cylinders) ist in Bezug auf irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gehende Momentenebene das nämliche, wie das von irgend einem der Parallelschnitte, in welchem man sich die Masse des ganzen Körpers concentrirt denkt, indem man sie gleichmässig über ihn ausbreitet. Es folgt dies sofort daraus, dass man sich das ganze Prisma oder den Cylinder parallel zu der Schwerpunktsaxe in dünne, linienförmige Lamellen von gleicher Länge zerlegt denken kann.

Die Länge desjenigen Durchmessers des Centralellipsoids, welcher in der Schwerpunktsaxe liegt, ist leicht gefunden. Bezeichnet g den Flächeninhalt der End- sowie der durchweg gleichen Schnittflächen, und x die auf der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung einer Schnittfigur vom Schwerpunkt des Prismas oder Cylinders, endlich h die Länge der Schwerpunktsaxe, so ist das Quadrat jenes Halbdurchmessers

$$a^2 = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} g x^2 dx}{\int_0^{\frac{h}{2}} g dx} = \tfrac{1}{12} h^2 = (0{,}2887\,h)^2.$$

Dieser Werth stimmt mit demjenigen überein, welchen man für den in derselben Richtung liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse eines Parallelogramms erhält, in dem irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gelegte Ebene das Prisma oder den Cylinder schneidet; diese Uebereinstimmung kann übrigens auch leicht direkt erwiesen werden.

Der Kern des Prismas oder Cylinders ist eine Doppelpyramide, bezw. ein Doppelkegel mit einer Basis, welche der Kern der Schnittfigur in der zu den Endflächen parallelen Ebene ist, welche durch den Schwerpunkt gelegt wird. Die beiden Spitzen liegen in der Schwerpunktsaxe und auf beiden Seiten jener Ebene gleichweit von ihr entfernt. Ihre längs der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung von letzterer ist

$$\frac{\frac{1}{12} h^2}{\frac{1}{2} h} = \tfrac{1}{6} h.$$

Die ganze Höhe des Kerns, von Spitze zu Spitze gemessen, nimmt also das mittlere Drittheil der Schwerpunktsaxe ein.

§. 144. **Pyramide und Kegel.** — Indem man sich diese Körper durch Ebenen, parallel zu ihrer Grundfläche, in dünne Platten zerschnitten denkt, sieht man leicht, dass in ihrem Centralellipsoid der Stellung jener Parallelebenen die Gerade conjugirt ist, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet, und die wir wieder kurz die Schwerpunktsaxe nennen. Alle Schnittfiguren jener Parallelebenen mit der Pyramide oder dem Kegel sind ähnlich und ähnlich liegend, und haben desshalb auch ähnliche und ähnlich liegende Centralellipsen. Dieselbe Gestalt und Lage hat folglich auch die Ellipse, in welcher eine parallel zur Grundfläche liegende Ebene, die durch den Schwerpunkt des Körpers oder Mittelpunkt des Centralellipsoids geht, das letzere schneidet. Um diese Ellipse zu kennen, reicht es folglich aus, einen einzigen Halbdurchmesser von ihr zu bestimmen, also das Trägheitsmoment oder den Schwungradius der Pyramide oder des Kegels in Bezug auf irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gehende Ebene zu finden. Diese Ebene schneidet alle Schnittfiguren der obigen Parallelebenen in parallelen Linien, denen in den Centralellipsen der Schnittfiguren parallele Durchmesser conjugirt sind. Die Längen der letzteren sind den Entfernungen der Schnittfiguren von der Spitze der Pyramide oder des Kegels proportional. Bezeichnet a die halbe Länge desjenigen von diesen Durchmessern, der in der Grundfläche liegt, g den Inhalt der letzteren, dann x die längs der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung irgend einer der Schnittfiguren von der Grundfläche, endlich a_x die Länge des zu a parallelen Durchmessers ihrer Centralellipse, so ist

$$a_x = a \frac{h-x}{h},$$

unter $\mathfrak{h}$ die Länge der Schwerpunktsaxe verstanden; der Flächeninhalt g der Schnittfigur selbst ist

$$g_x = g\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$$

und folglich ihr Trägheitsmoment bezüglich jener Momentenebene

$$a^2 g \left(\frac{h-x}{h}\right)^4.$$

das Trägheitsmoment der entsprechenden Platte von der Dicke dx ist folglich porportional mit

$$a^2 g \left(\frac{h-x}{h}\right)^4 dx,$$

und daher das Quadrat des Schwungradius der Pyramide oder des Kegels bezüglich der angenommenen Momentenebene gleich

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int_0^h a^2 g \left(\frac{h-x}{h}\right)^4 dx}{\int_0^h g \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 dx} = \tfrac{3}{5} a^2 = (0{,}7746\, a)^2.$$

Dies ist zugleich der gesuchte Halbdurchmesser der Schnittellipse des Centralellipsoids. Dieselbe ist also bekannt, wenn die Centralellipse der Grundfläche gefunden ist.

Derjenige Durchmesser des Centralellipsoids, welcher jener Schnittellipse conjugirt ist und in der Schwerpunktsaxe liegt, ist nun ebenso zu bekommen, wie der ähnlich liegende des Tetraëders im §. 142. Obiger Bezeichnung gemäss ist das Quadrat des Schwungradius der Pyramide oder des Kegels für die Grundfläche als Momentenebene

$$k^2 = \frac{\int_0^h g \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 x^2 dx}{\int_0^h g \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 dx} = \tfrac{1}{10} h^2.$$

Daraus folgt für das Quadrat des gesuchten Halbdurchmessers

$$\mathfrak{b}^2 = \tfrac{1}{10} h^2 - (\tfrac{1}{4} h)^2 = \tfrac{3}{80} h^2 = (0{,}1937 h)^2.$$

Der Kern der Pyramide oder des Kegels ist wieder eine Pyramide oder ein Kegel. Die Spitze der- oder desselben liegt in der Schwerpunktsaxe, und ihre Entfernung vom Schwerpunkte oder Mittelpunkt des Centralellipsoids ist

$$\frac{\frac{3}{80} h^2}{\frac{1}{4} h} = \tfrac{3}{20} h.$$

Die Grundfläche des Kerns ist die Polarebene eines Punktes, der mit der Spitze des gegebenen Körpers symmetrisch gegen dessen Schwerpunkt liegt; ihre in der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung von letzterem ist folglich

$$\frac{\frac{3}{80} h^2}{\frac{3}{4} h} = \tfrac{1}{20} h.$$

Die in derselben Richtung gemessene Höhe des Kerns ist daher

$$\tfrac{3}{10}h + \tfrac{1}{10}h = \tfrac{2}{5}h.$$

Bei einer Pyramide ist die Grundfläche des Kerns ein Polygon von ebenso viel Ecken, als die Grundfläche der Pyramide hat. Jede Ecke entspricht in bekannter Weise einer Seitenfläche der letzteren. Jede Seite der Grundfläche ist im Centralellipsoid die Polare einer Linie, welche einer Seitenkante der Pyramide parallel ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegt. Eine gleiche Beziehung findet statt zwischen den Seitenkanten des Kerns und den Seiten der Grundfläche der Pyramide. Aehnliche Verhältnisse ergeben sich beim Kegel.

§. 145. Das Ellipsoid. — Aus dem zweiten Satze des §. 124 folgt sofort, dass eine Ebene und eine gerade Linie, die in einem gegebenen Ellipsoid conjugirt sind, dieselbe Beziehung in dessen Centralellipsoid haben. Nennen wir g den Flächeninhalt der Ellipse, in welcher eine Ebene E, die durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gelegt wird, das letztere schneidet, a die Länge des zur Ebene E conjugirten Halbdurchmessers des gegebenen Ellipsoids, x die auf ihm gemessene Entfernung einer Parallelebene E_x zu E, die das Ellipsoid in einer der g ähnlichen Ellipse mit dem Flächeninhalt g_x schneidet, so ist

$$g_x = g\,\frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

und daher das Quadrat des Schwungradius des Ellipsoids für die Momentenebene E und für die Richtung von a

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int_0^a g\frac{a^2 - x_2}{a^2}x^2dx}{\int_0^a g\frac{a^2 - x^2}{a^2}dx} = \tfrac{1}{5}a^2 = (0{,}4472\,a)^2.$$

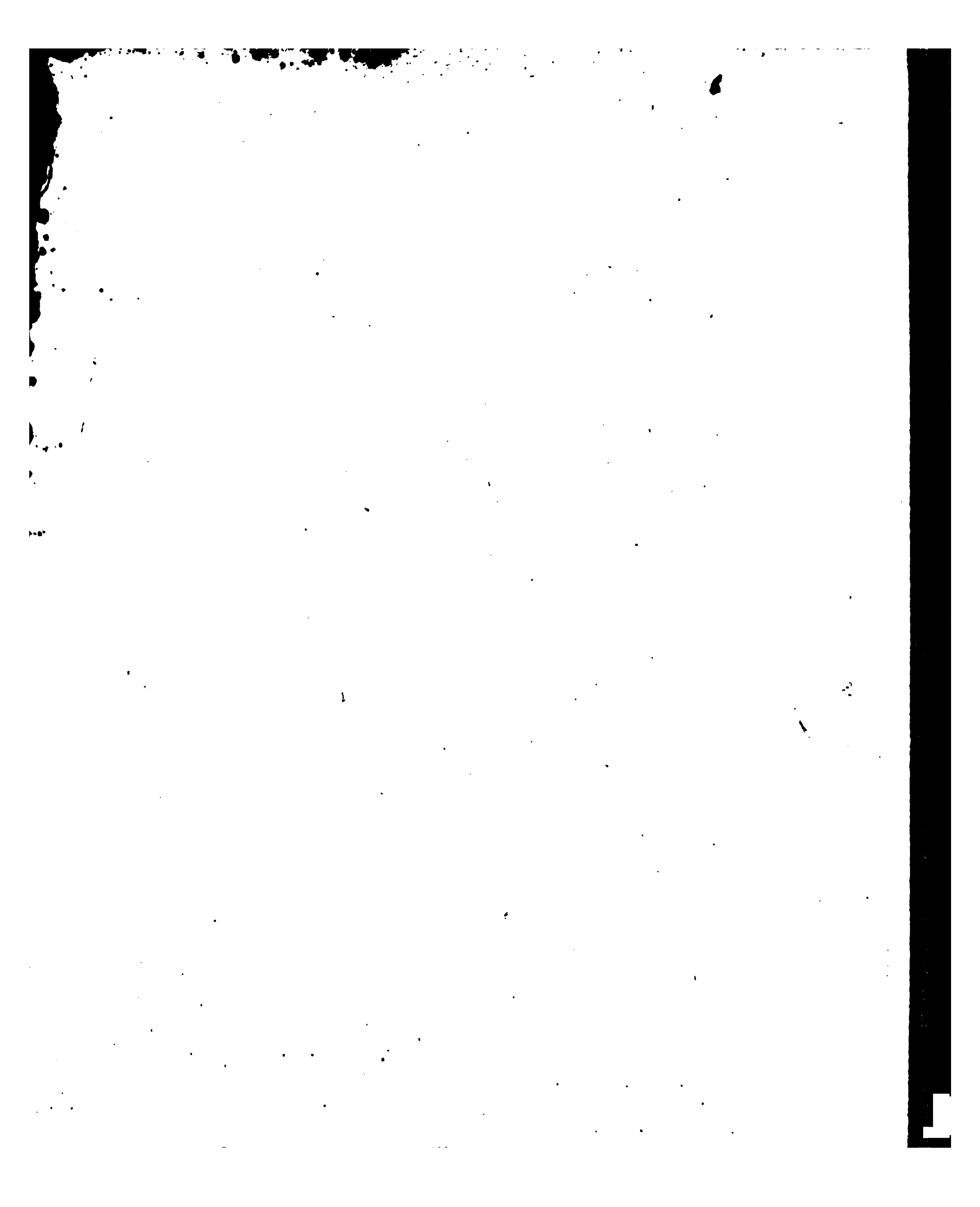
Dieses $\mathfrak{a}$ ist zugleich der Halbdurchmesser, welcher der Ebene E im Centralellipsoid conjugirt ist. Da das nämliche Resultat für alle möglichen Lagen der Ebene E und ihres conjugirten Durchmessers erhalten wird, so folgt, dass ein Ellipsoid und sein Centralellipsoid concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Körper sind, deren Dimensionen sich verhalten wie $1 : \sqrt{\tfrac{1}{5}}$.

Der Kern des Ellipsoids ist auch wieder ein Ellipsoid; für eine Neutralebene, die parallel zur Ebene E das gegebene Ellipsoid berührt, liegt der entsprechende Angriffspunkt der Resultante der Kräfte auf dem zu E conjugirten Durchmesser a und zwar in der Entfernung

$$\frac{\tfrac{1}{5}a^2}{a} = \tfrac{1}{5}a$$

vom Mittelpunkt des Ellipsoids. Es ist also der Kern ein Ellipsoid, das ebenfalls mit dem gegebenen concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend ist, dessen Dimensionen aber fünfmal so klein als die des gegebenen Ellipsoids sind.

Kgl. Hofbuchdruckerei von Dr. C. Wolf u. Sohn.



ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK U. GRAPHISCHEN STATIK
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

ATLAS.

20 TAFELN.)

MÜNCHEN 1871.

R. OLDENBOURG.

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

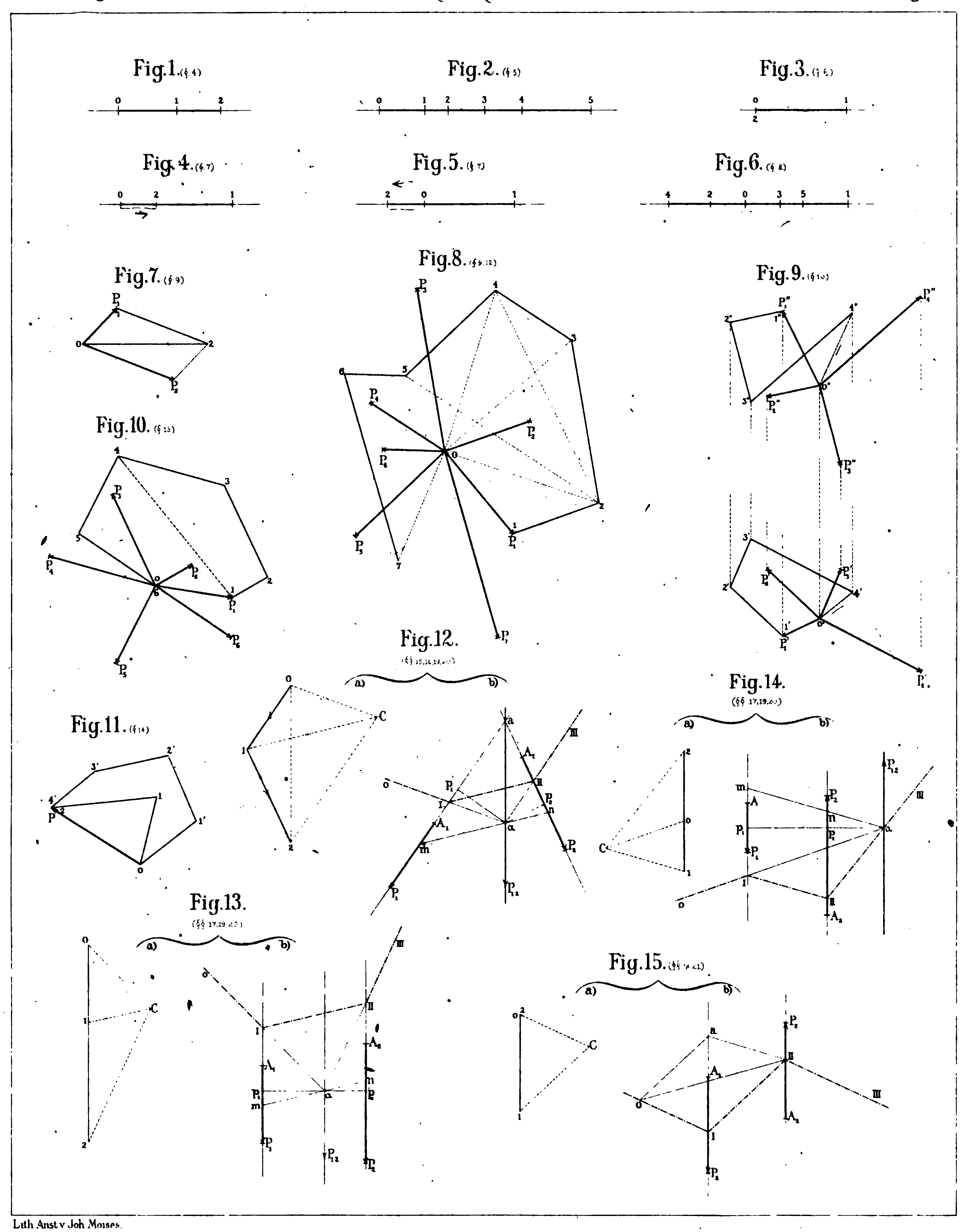
ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK U. GRAPHISCHEN STATIK
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

ATLAS.

(20 TAFELN.)

MÜNCHEN 1871.

R. OLDENBOURG.



Lith. Anst. v. Joh. Moises.

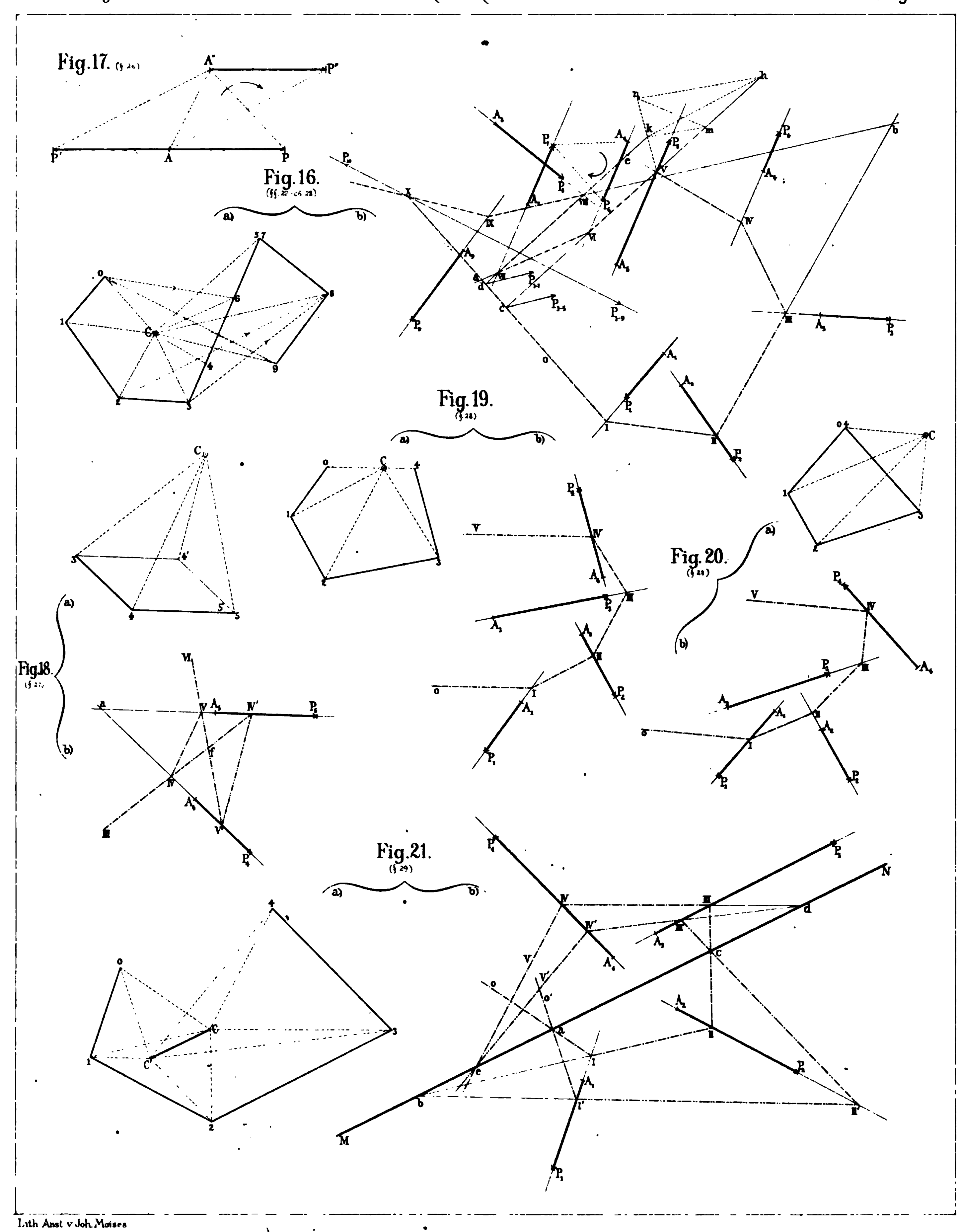
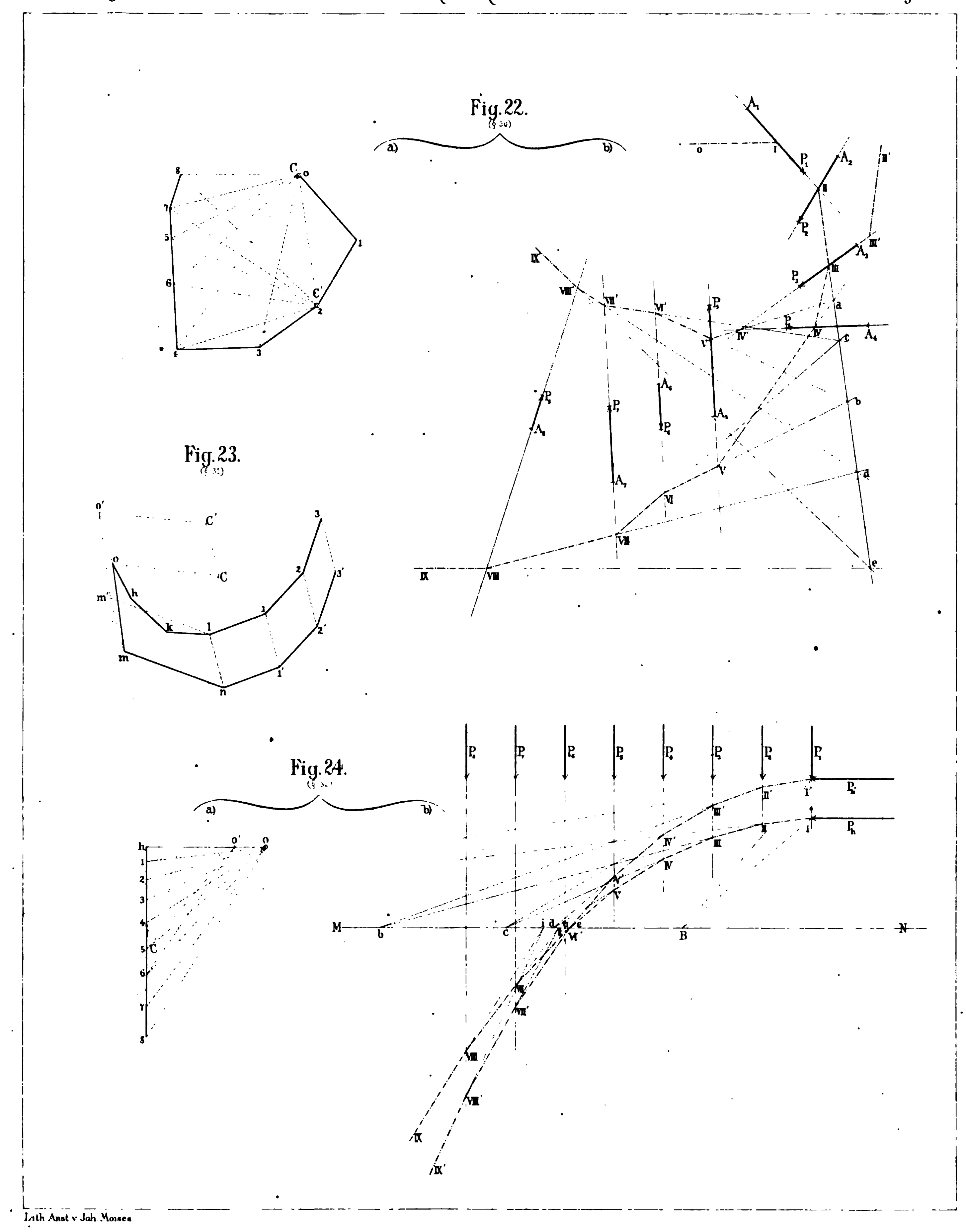
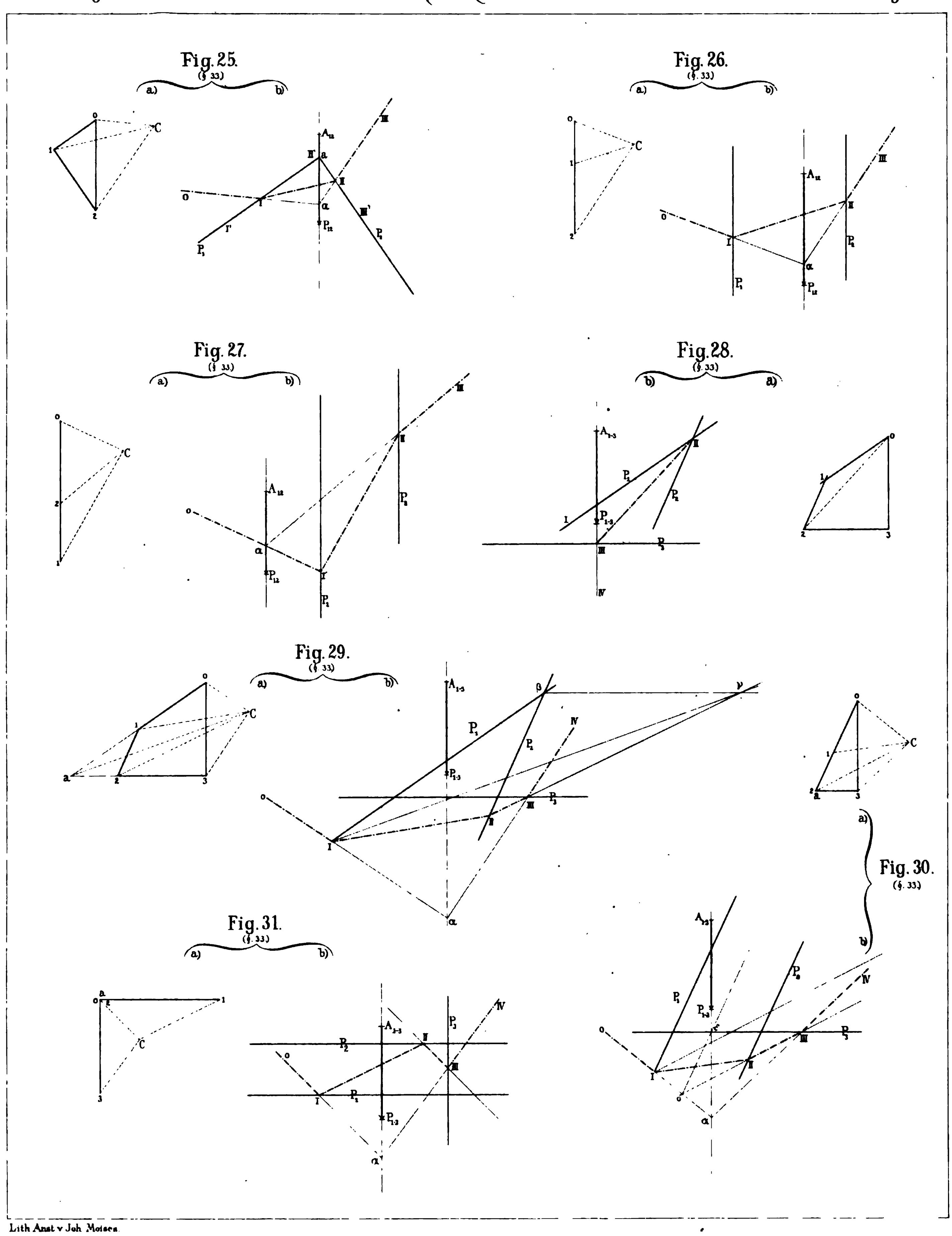


Fig. 17.
Fig. 16.
a)
b)
Fig. 19.
a)
b)
Fig. 18.
a)
b)
Fig. 20.
a)
b)
Fig. 21.
a)
b)

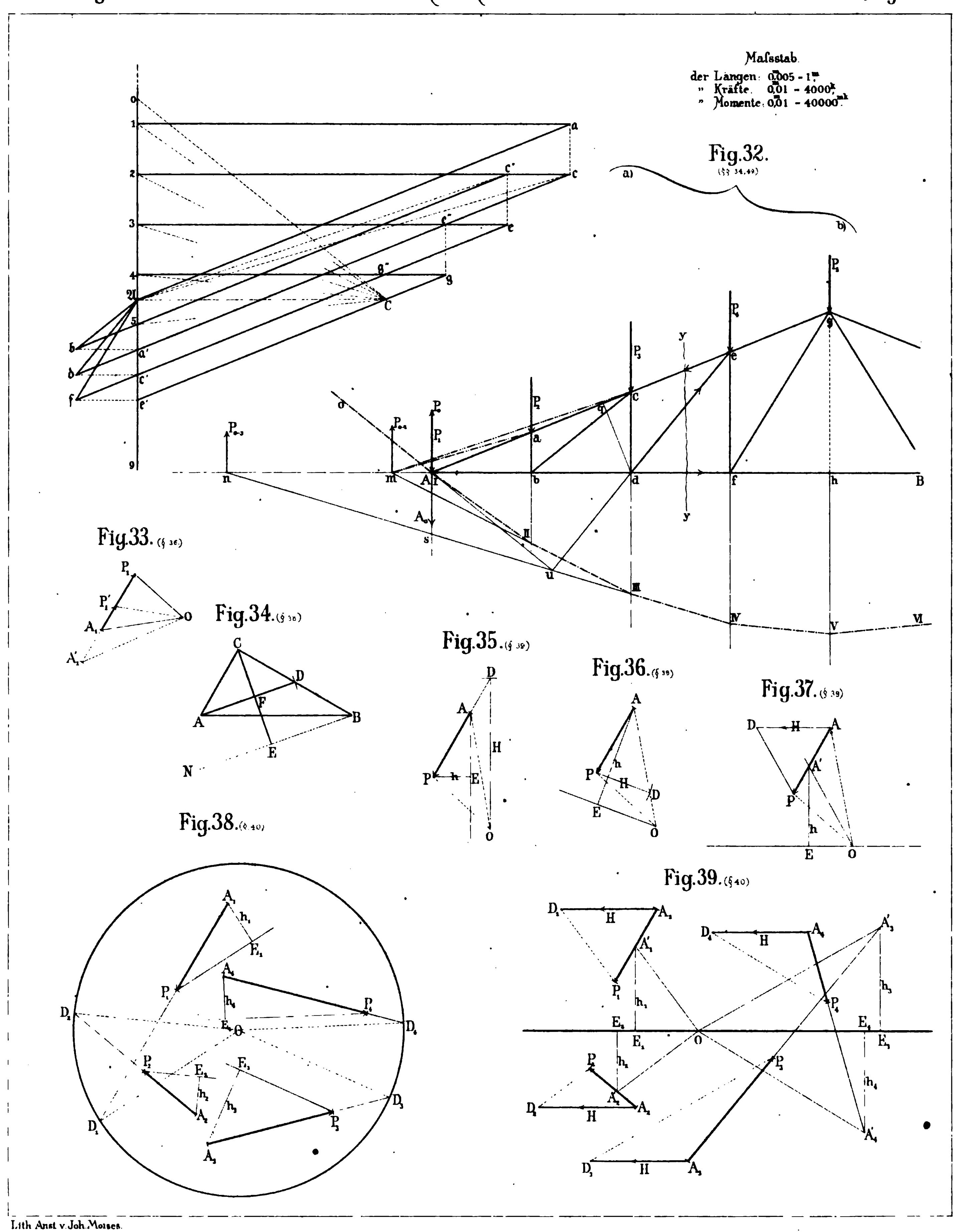


Lith Anst v Joh. Moises

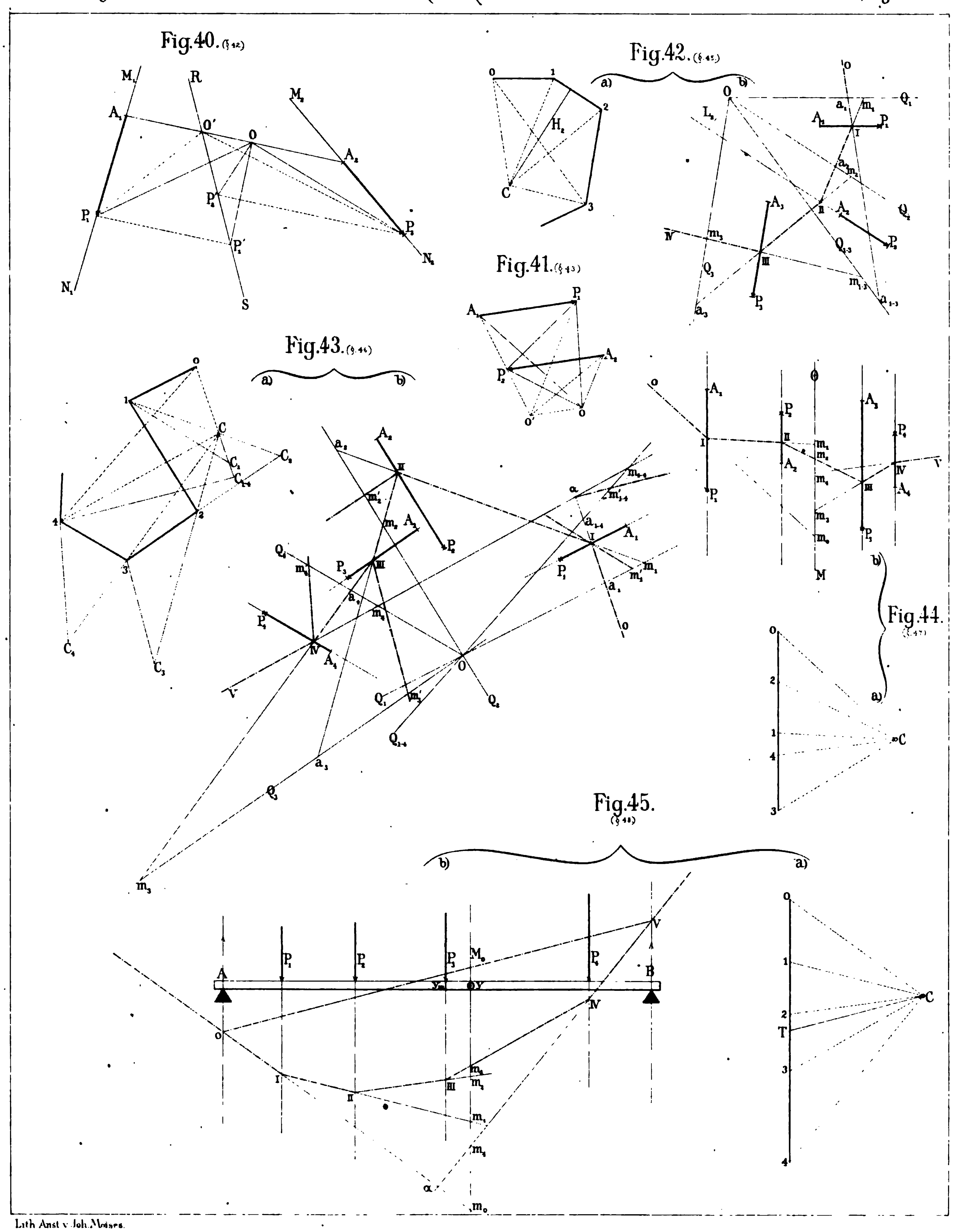


Lith Anst v Joh. Moises.

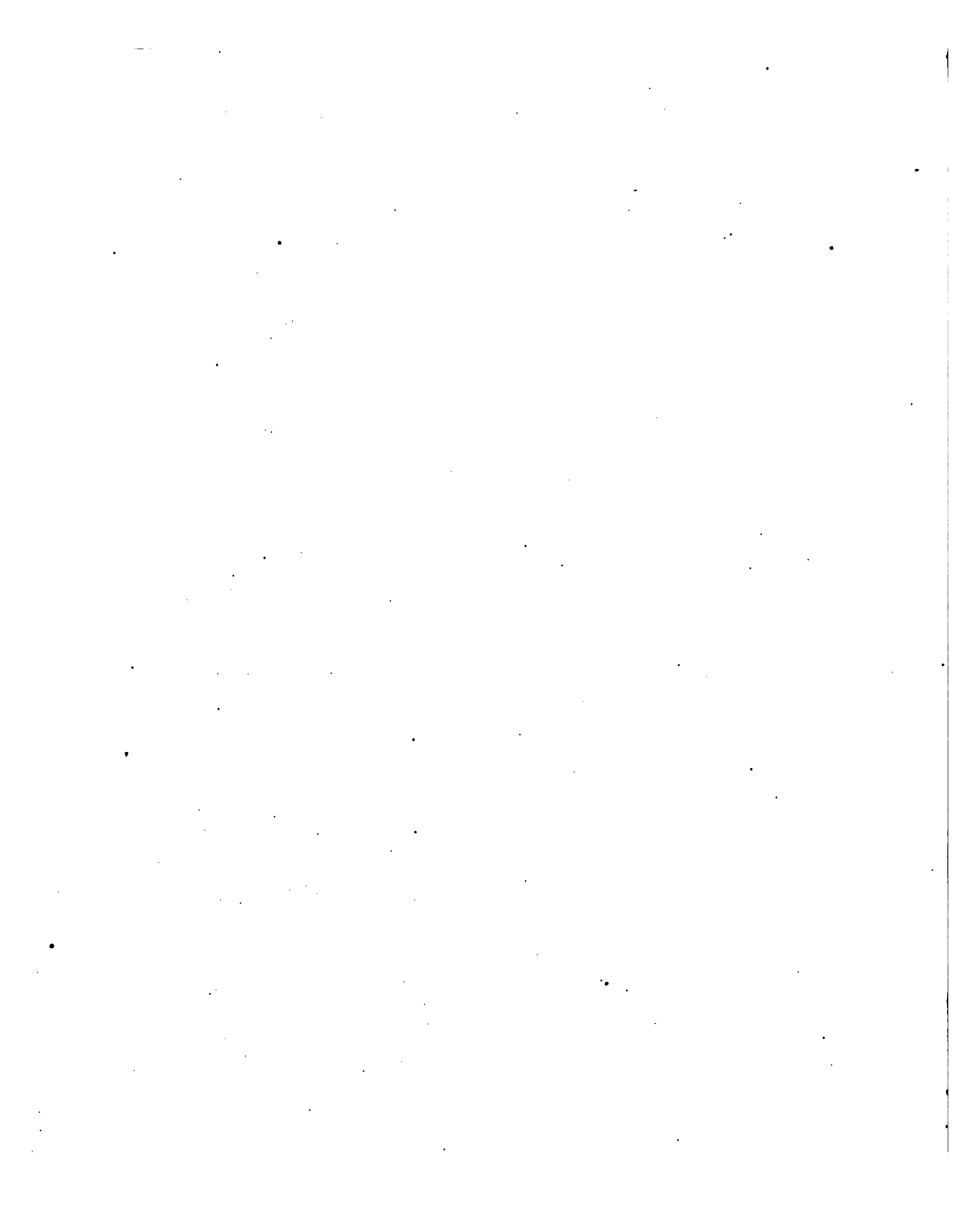


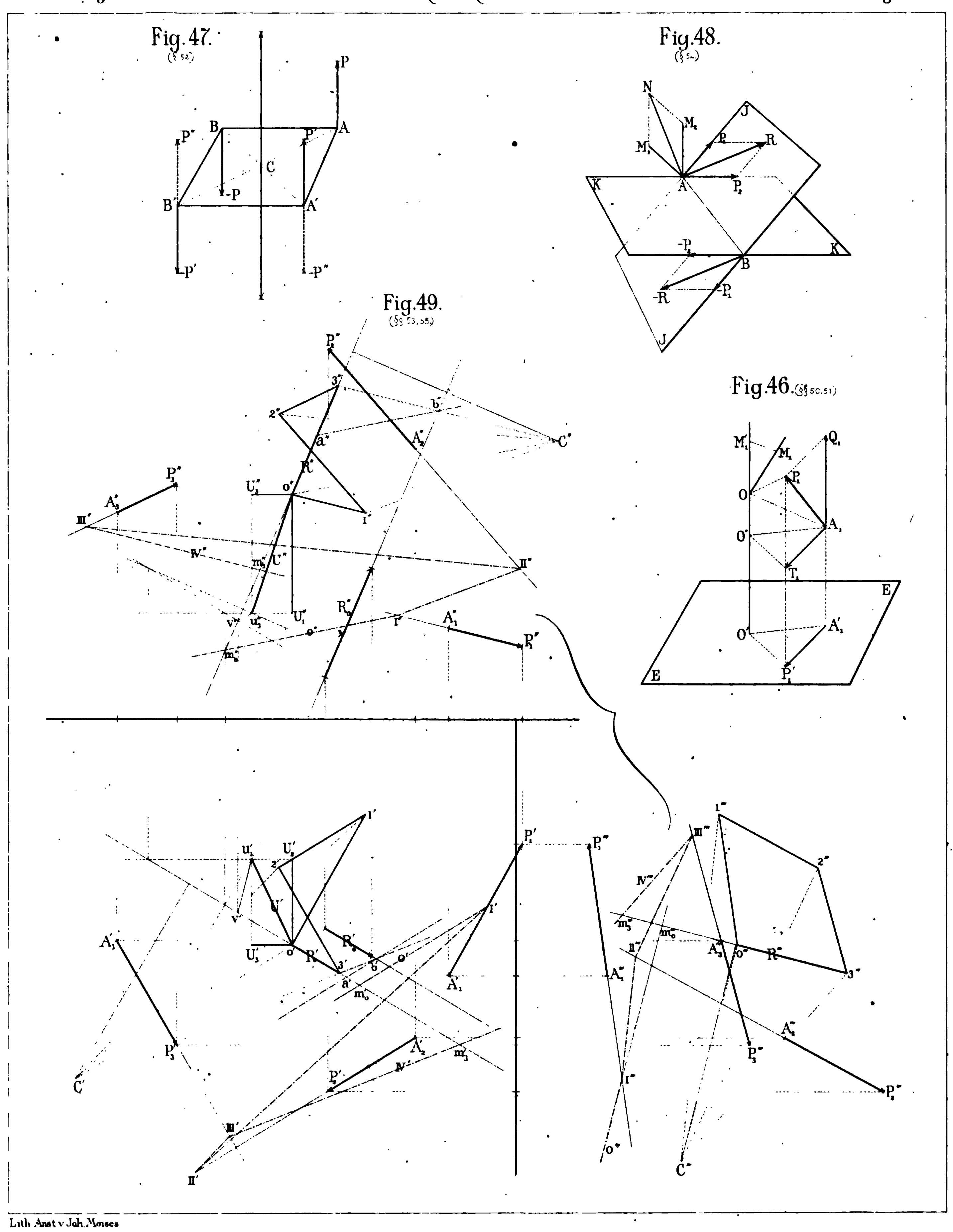


Lith. Anst. v. Joh. Moises.

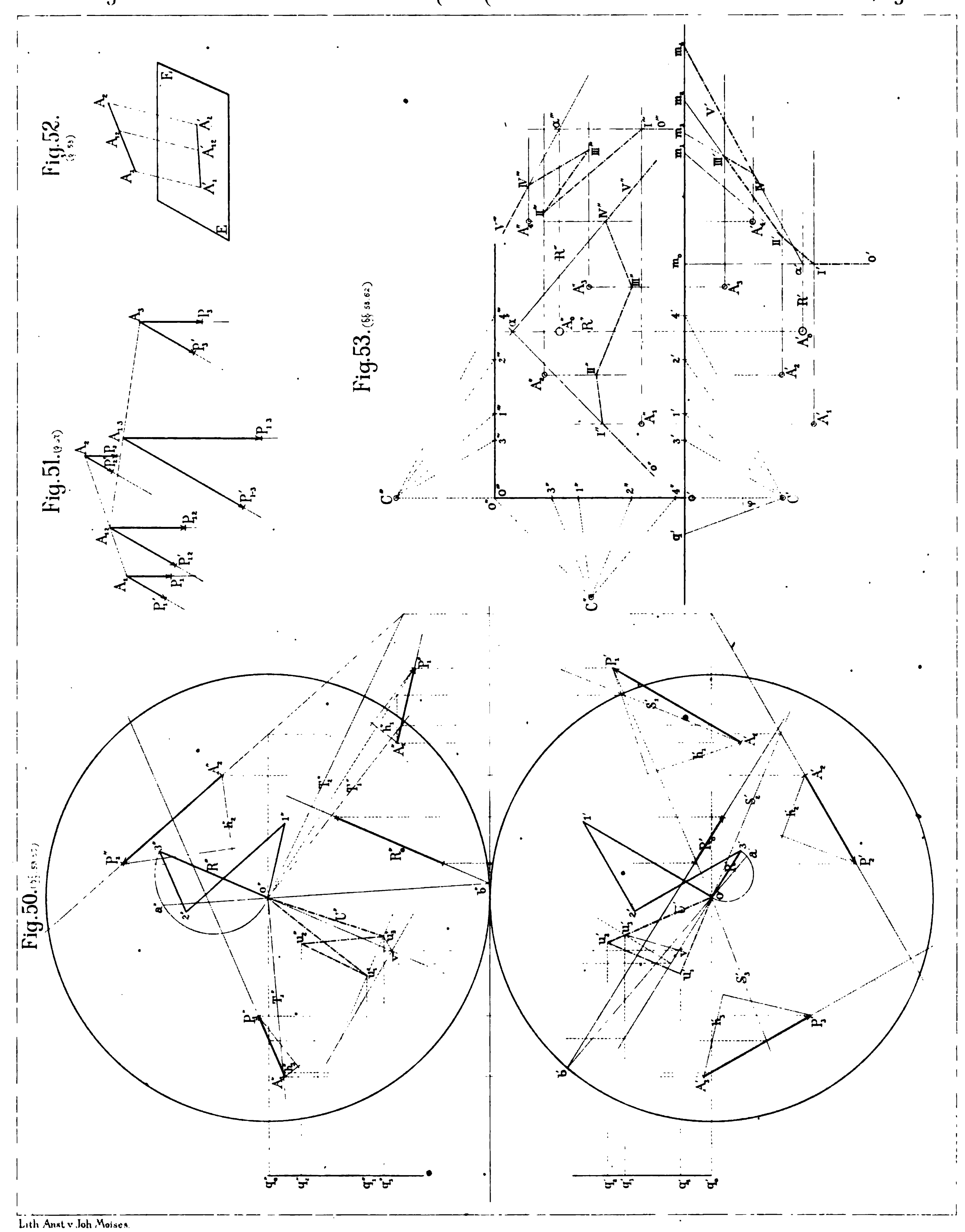


Lith. Anst. v. Joh. Moises.

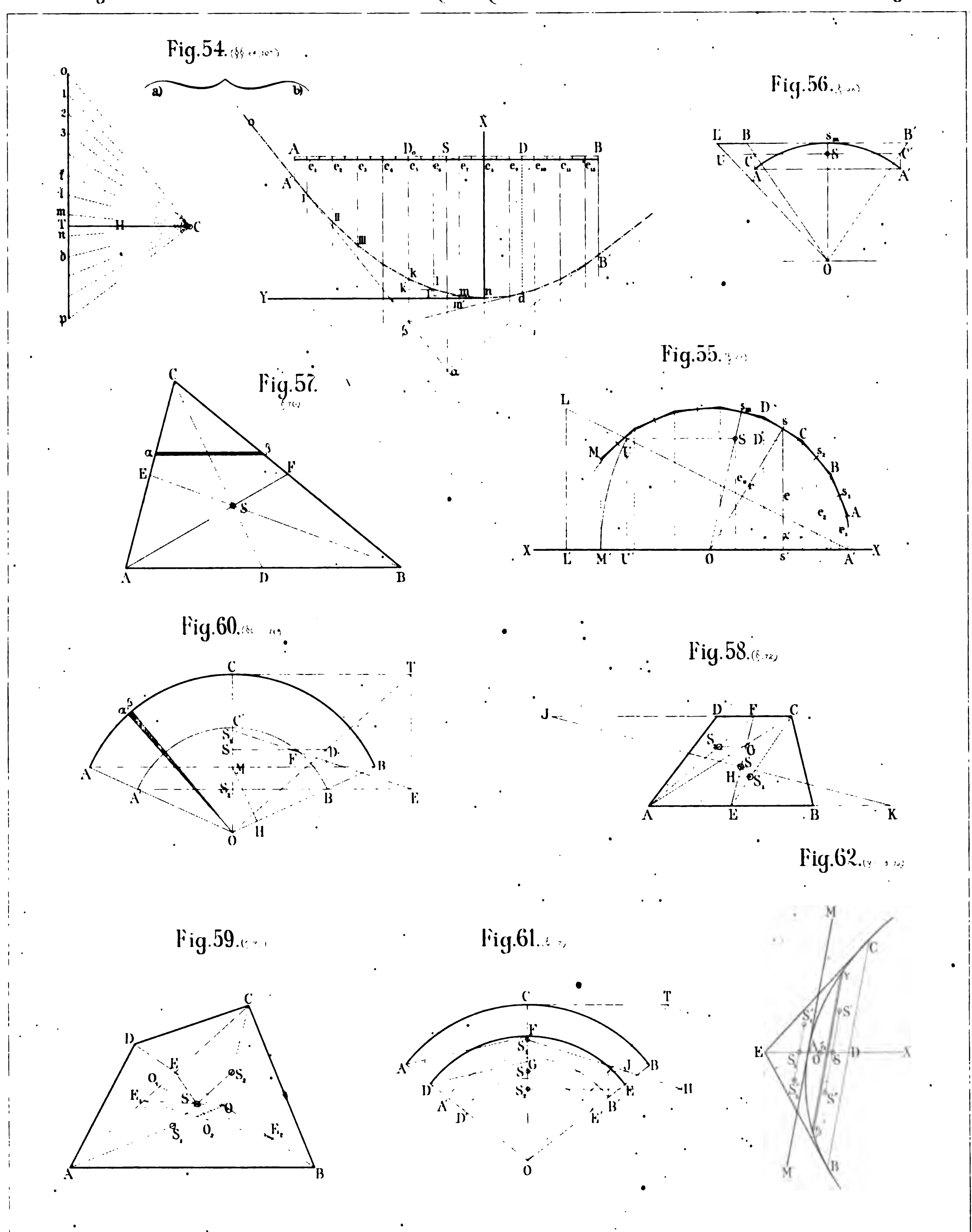




Lith. Anst. v. Joh. Moises



Lith. Anst. v. Joh. Moises.



Lith. Anst. v. Joh. Moises.

Fig. 63. (§§ 79-140.)

Lith. Anst. v. Joh. Moises.

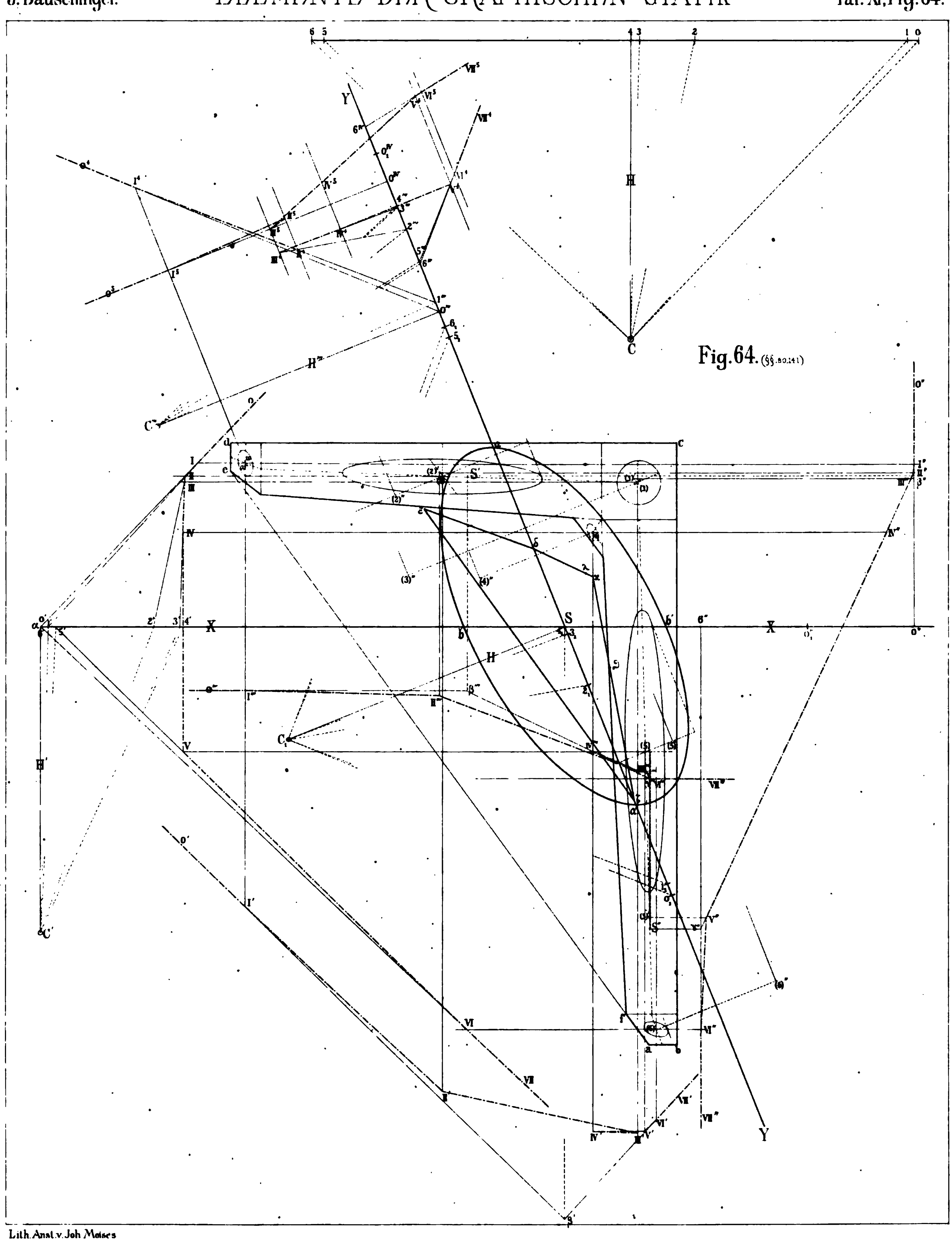


Fig. 64. (§§. 80, 141)

Lith. Anst. v. Joh. Moises

Fig. 65. (§ 81)

Fig. 66. (§ 80)

Fig. 67. (§ 86)

Fig. 68. (§ 84)

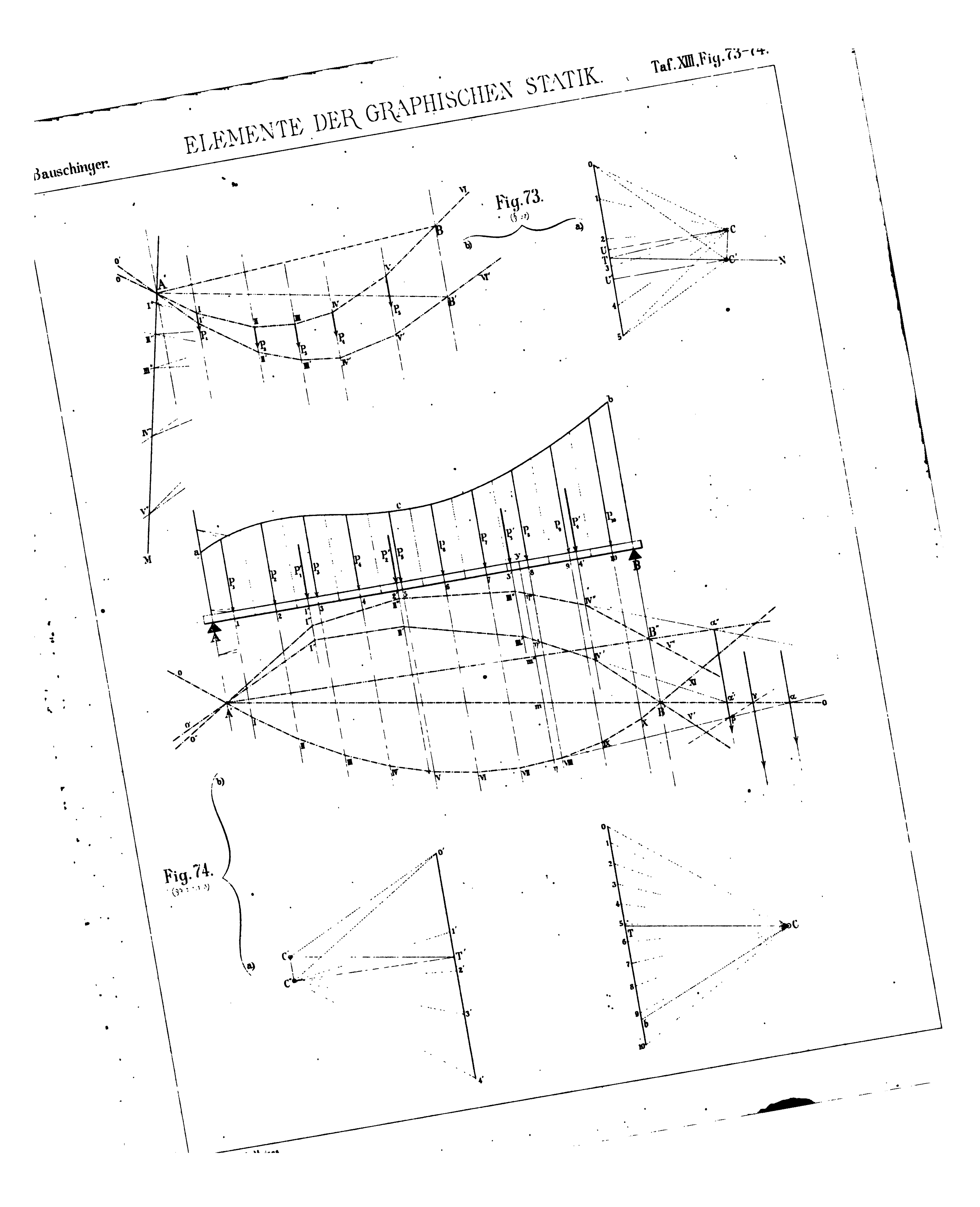
Fig. 69. (§ 90)

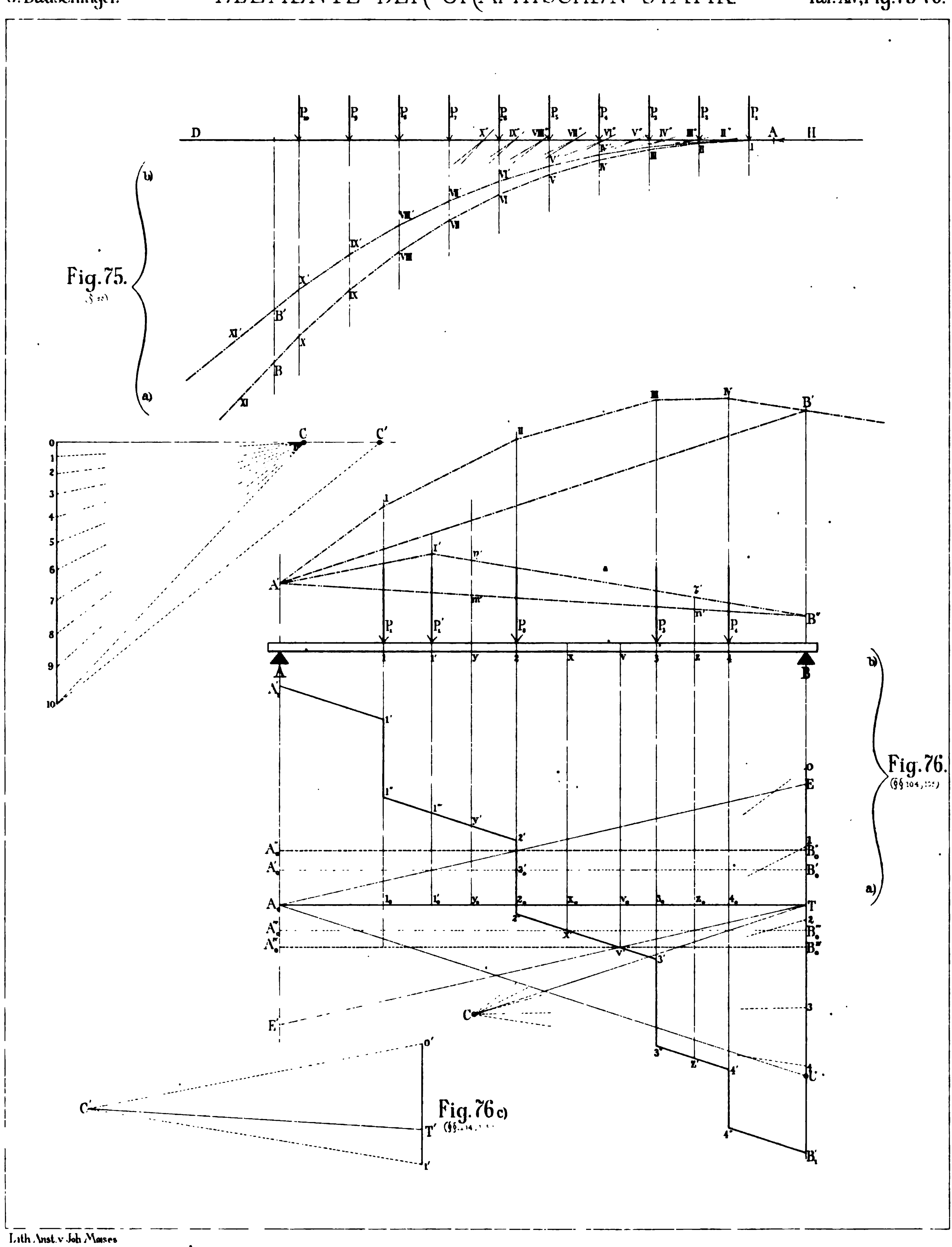
Fig. 70. (§ 91)

Fig. 71. (§ 92)

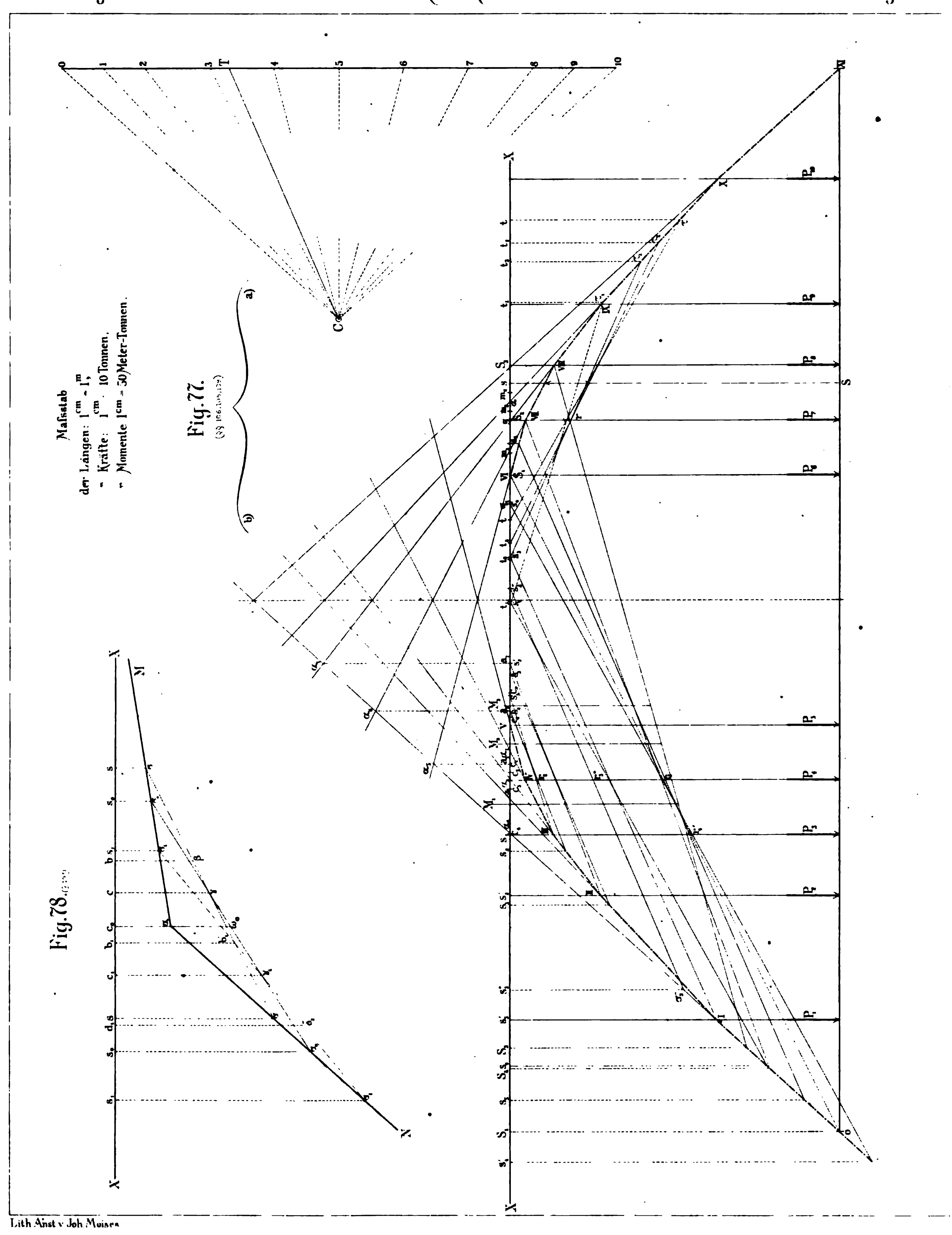
Fig. 72. (§ 93)

Lith. Anst. v. Joh. Moises.

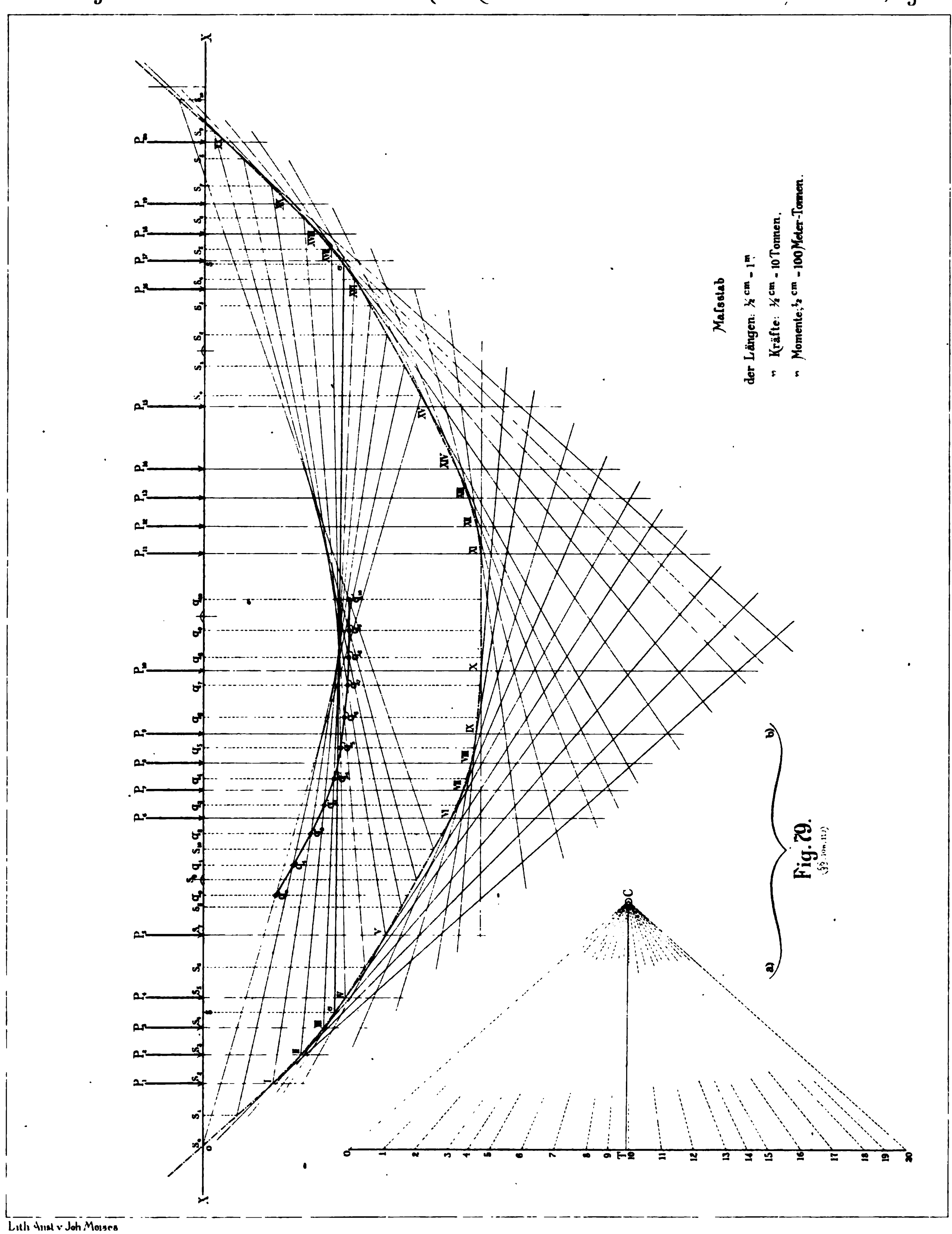

Bauschinger.
ELEMENTE DER GRAPHISCHEN STATIK.
Taf. XIII, Fig. 73-74.
Fig. 73.
a)
b)
Fig. 74.
a)
b)

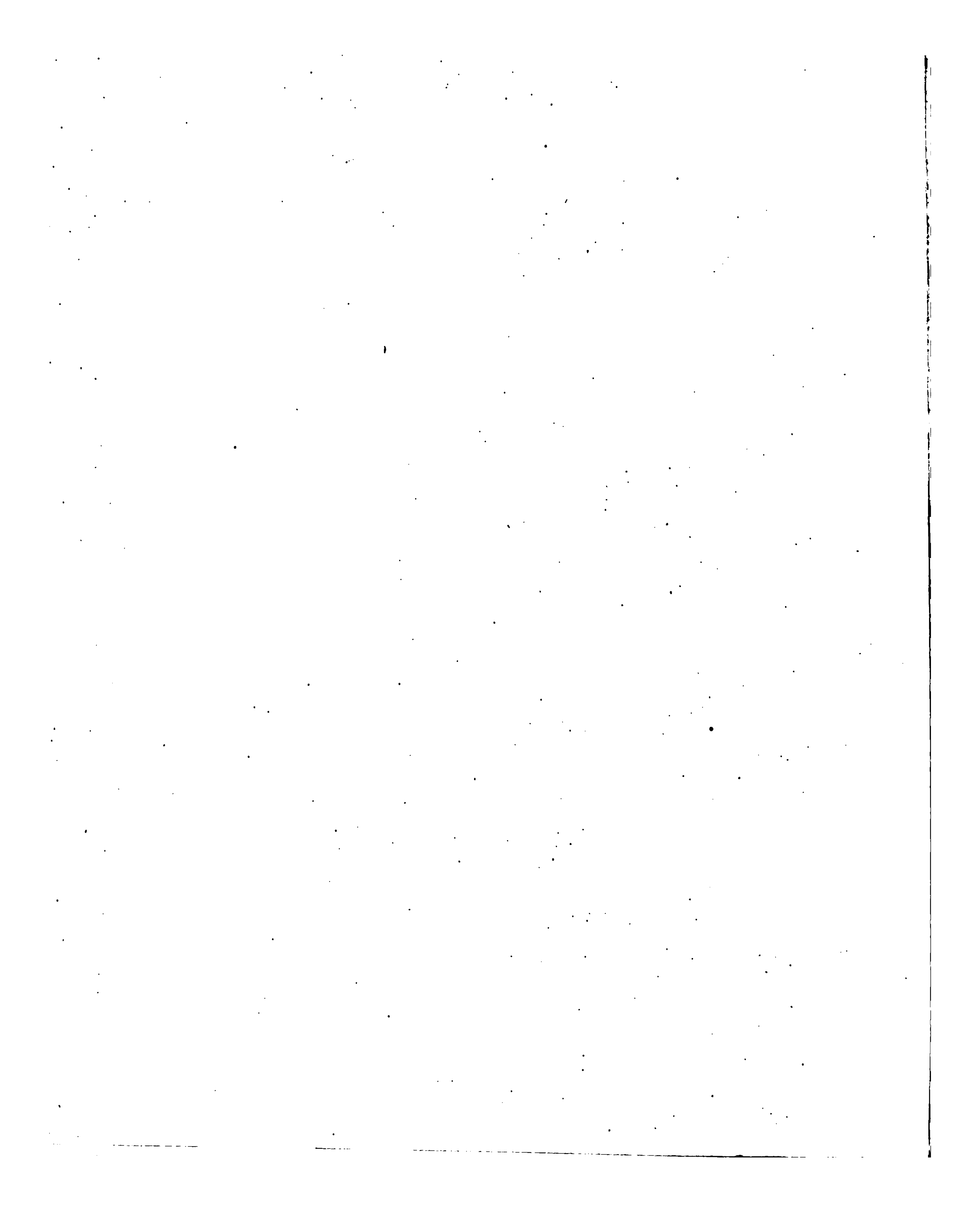


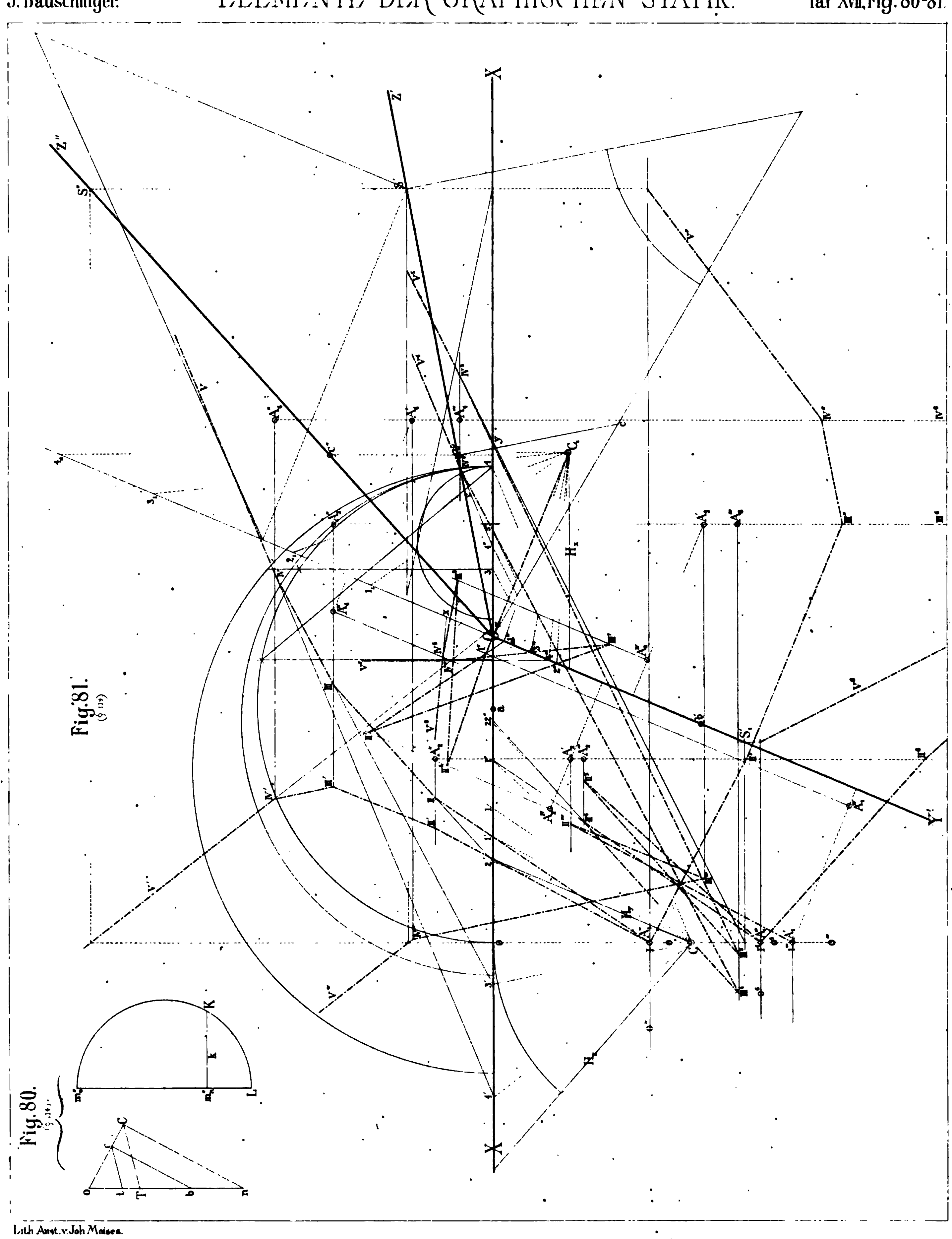
Lith. Anst. v. Joh. Moises



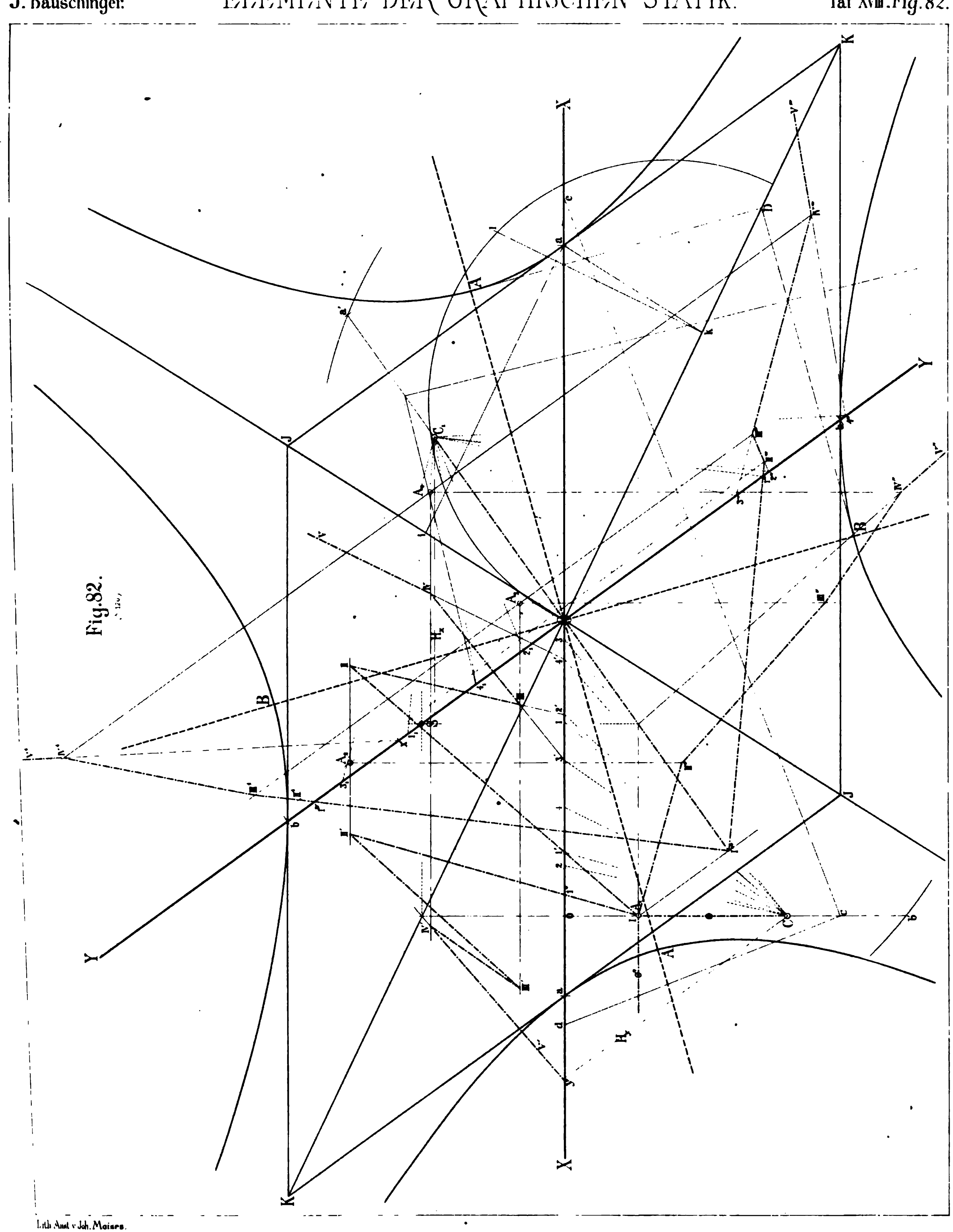
Lith. Anst. v. Joh. Moises


Masstab
der Längen: ½ cm = 1 m.
" Kräfte: ½ cm = 10 Tonnen.
" Momente: ½ cm = 100 Meter-Tonnen.
Fig. 79.
a)
b)

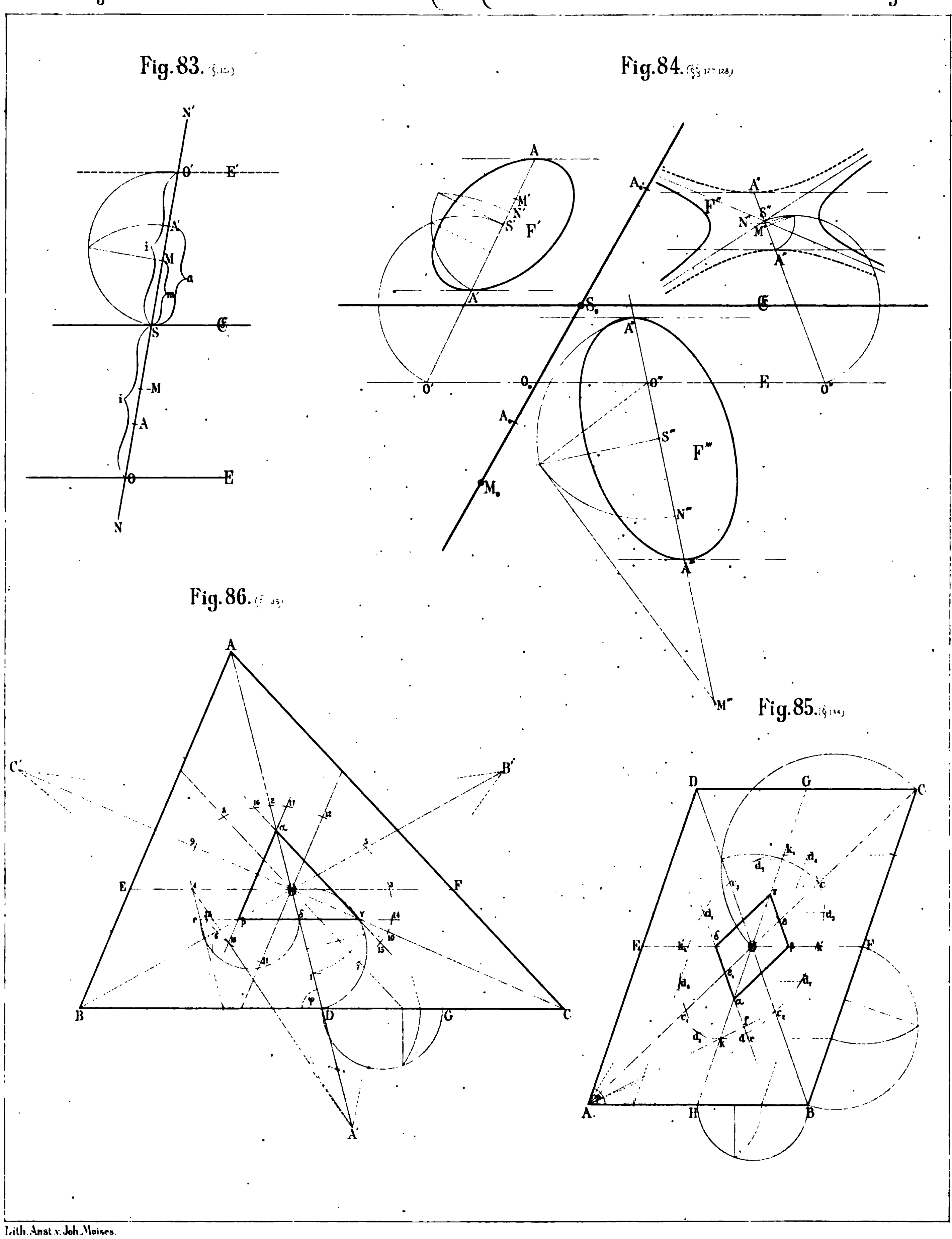


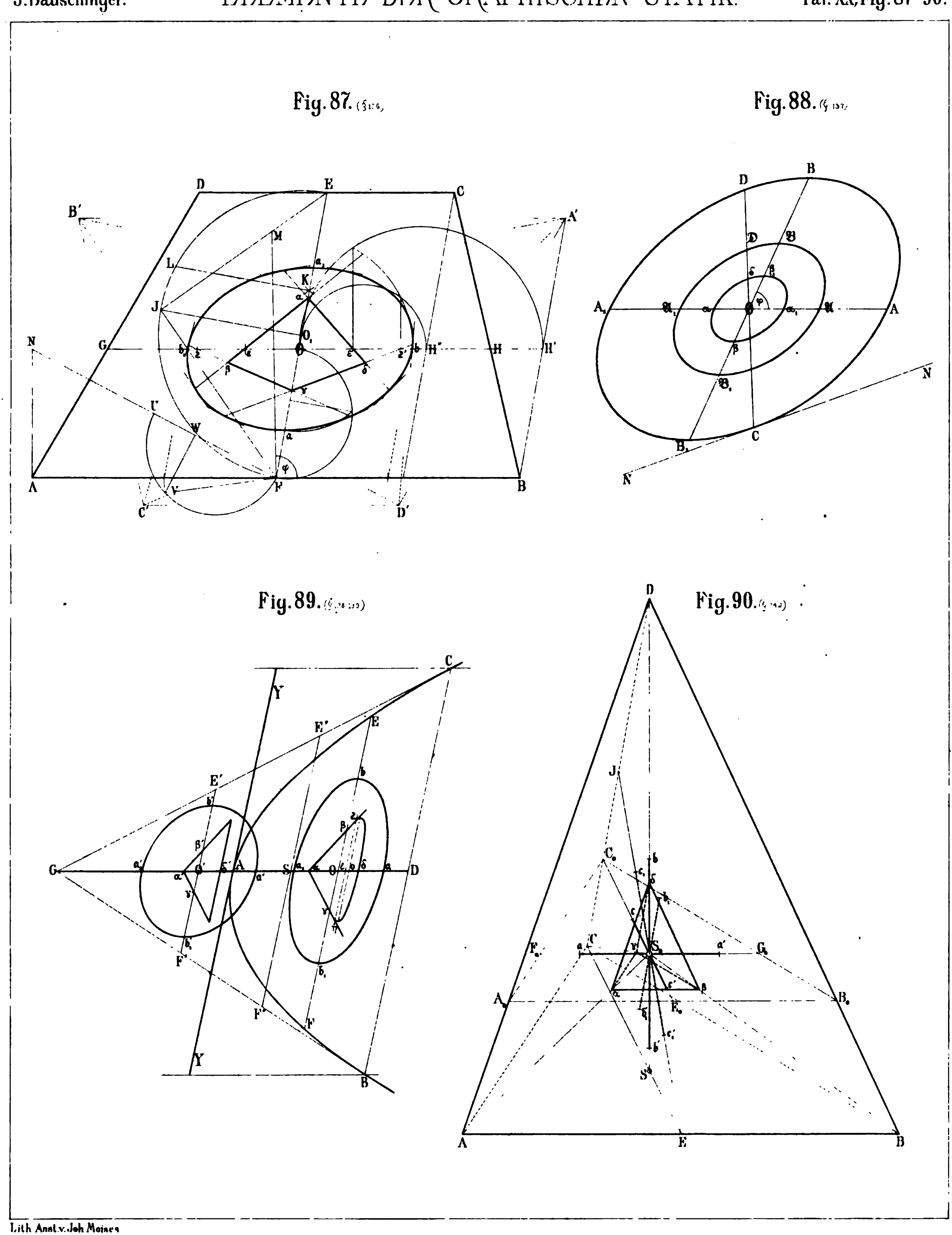


Lith Anst. v. Joh Moises.

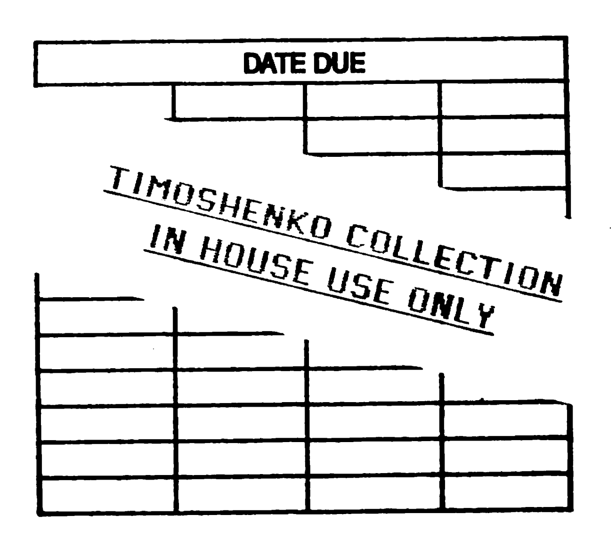


Lith. Anst. v. Joh. Moises.


Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
N′
O′
E′
A′
M
S
O
E
N
F′
F″
F‴
S₀
M₀
A₀
O₀
A
B
C
D
E
F
G
H
C′
B′



Lith. Anst. v. Joh. Moises


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

